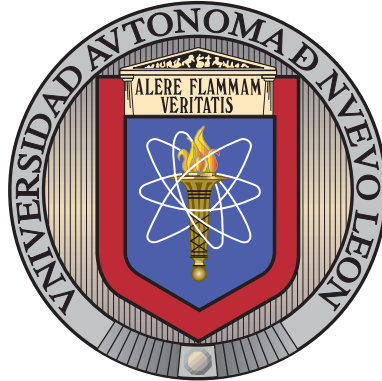


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINTONIZACIÓN DE FRECUENCIA DE FILTROS
PASA BANDA DISEÑADOS CON O-SPLINES.

POR

ING. EYELIN DELGADO RUIZ

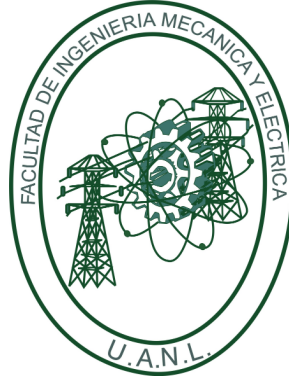
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

MAYO 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINTONIZACIÓN DE FRECUENCIA DE FILTROS
PASA BANDA DISEÑADOS CON O-SPLINES.

POR

ING. EYELIN DELGADO RUIZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

MAYO 2021



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Sintonización de frecuencia de filtros, pasa banda diseñados con O-splines", realizada por el alumno Eyelin Delgado Ruiz, con número de matrícula 2032327, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

Dr. José Antonio de la O Serna
Director

Dr. José Ramón Rodríguez Cruz
Revisor

Dr. César Vargas Rosales
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

133

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo de 2021

A mi querida abuela María

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | XIII |
| Resumen | XIV |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 2 |
| 1.2. Descripción del problema | 6 |
| 1.3. Objetivo General | 6 |
| 1.4. Objetivos Particulares | 6 |
| 1.5. Hipótesis | 7 |
| 1.6. Justificación | 7 |
| 2. Nociones preliminares | 9 |
| 2.1. Transformada de Fourier en Tiempo Discreto | 9 |
| 2.2. Transformada Discreta de Fourier | 10 |
| 2.3. Serie de Taylor | 12 |
| 2.4. Funciones spline polinomiales | 13 |

| | |
|---|-----------|
| 2.5. Sistemas lineales invariantes en el tiempo o invariantes a desplazamientos | 14 |
| 2.6. Convolución | 15 |
| 3. O-splines | 17 |
| 3.1. Fasor dinámico | 18 |
| 3.2. Subespacio Digital Taylor-Fourier | 19 |
| 3.3. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros DTFT . | 24 |
| 3.4. Diferenciadores paso bajo | 27 |
| 3.5. O-splines paso bajo en forma cerrada | 29 |
| 3.6. O-splines armónicos | 32 |
| 4. Algoritmo de sintonización de frecuencia | 34 |
| 4.1. Obtención del sincrofasor | 35 |
| 4.2. Algoritmo propuesto | 39 |
| 4.2.1. Formulación del Algoritmo | 39 |
| 4.2.2. Indicadores de rendimiento | 41 |
| 4.2.3. Resultados de la simulación | 43 |
| 5. Conclusiones | 58 |
| A. Matriz de Vandermonde | 60 |
| A.1. Determinante de la matriz de Vandermonde | 60 |

| | |
|--|-----------|
| B. Espectros de las O-splines | 62 |
| B.1. Espectros de las O-splines en forma cerrada | 62 |
| C. Código en Matlab[®] | 64 |
| C.1. Algoritmo | 64 |
| C.2. Función Osplinepp.m | 69 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 3.1. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo para $K = 0, \dots, 9$ | 25 |
| 3.2. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes impares $K = 1, \dots, 9$ | 26 |
| 3.3. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes pares $K = 0, \dots, 8$ | 26 |
| 3.4. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los primeros diferenciadores para $K = 1, \dots, 9$ | 28 |
| 3.5. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los segundos diferenciadores para $K = 2, \dots, 9$ | 28 |
| 4.1. O-spline paso bajo de orden 9, de 10 ciclos, y respuesta en frecuencia del filtro pasa banda utilizado para extraer el sincrofasor. | 36 |
| 4.2. Respuesta al impulso de la primera y la segunda derivada del filtro paso bajo de Taylor-Fourier de orden 9. | 37 |
| 4.3. O-spline paso bajo de orden 3, de 4 ciclos, y respuesta en frecuencia del filtro pasa banda utilizado para extraer el sincrofasor. | 37 |

| | |
|--|----|
| 4.4. Respuesta al impulso de la primera y la segunda derivada del filtro paso bajo de Taylor-Fourier de orden 3. | 38 |
| 4.5. Error Vectorial Total (TVE). | 43 |
| 4.6. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ | 45 |
| 4.7. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ | 45 |
| 4.8. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ | 46 |
| 4.9. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ | 46 |
| 4.10. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 48 |
| 4.11. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 48 |
| 4.12. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 49 |
| 4.13. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 49 |
| 4.14. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ | 51 |
| 4.15. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ | 52 |

| | |
|--|----|
| 4.16. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ | 52 |
| 4.17. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ | 53 |
| 4.18. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 54 |
| 4.19. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 54 |
| 4.20. TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 55 |
| 4.21. TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 55 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|--|----|
| 1.1. Principales antecedentes | 5 |
| 4.1. Pseudocódigo del algoritmo propuesto | 41 |
| 4.2. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ para diferentes offsets de frecuencia. | 44 |
| 4.3. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ para diferentes offsets de frecuencia. | 47 |
| 4.4. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ para diferentes offsets de frecuencia en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 47 |
| 4.5. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ para diferentes offsets de frecuencia en presencia de ruido blanco Gaussiano. | 50 |
| 4.6. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$, con $R = 5Hz/s$, para diferentes intervalos de tiempo. . | 51 |
| 4.7. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$, con $R = 5Hz/s$, para diferentes intervalos de tiempo. . | 51 |

-
- 4.8. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$, con $R = 5Hz/s$, para diferentes intervalos de tiempo, en presencia de ruido blanco Gaussiano. 56
- 4.9. TVE en % de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$, con $R = 5Hz/s$, para diferentes intervalos de tiempo, en presencia de ruido blanco Gaussiano. 56

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia, en especial a mis padres y a mi hermano, por su amor incondicional.

A mis tíos Luisi y Roli, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de este proyecto.

A Michel, por todo su apoyo, y por su amor.

A todos mis amigos y compañeros de la maestría que me ayudaron en mi formación personal y profesional.

A Jaime, por su inmensa ayuda desde el primer día.

A More, por impulsarme hacia mis sueños.

A pelota, por su alegría contagiosa.

A todo el profesorado del Posgrado de Ingeniería Eléctrica de la FIME, en especial a mi asesor, el Dr. José Antonio de la O Serna, por su ayuda en este proceso y por su actitud siempre alentadora.

Por último, pero no menos importante, un agradecimiento especial a la Universidad Autónoma de Nuevo León, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, y a México, por darme esta oportunidad, estaré eternamente agradecida.

RESUMEN

Ing. Eyelin Delgado Ruiz.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

Universidad Autónoma de Nuevo León.


Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: SINTONIZACIÓN DE FRECUENCIA DE FILTROS PASA BANDA DISEÑADOS CON O-SPLINES.

Número de páginas: 73.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: Este trabajo de tesis persigue como objetivo principal diseñar un algoritmo para sintonizar la frecuencia de filtros pasa banda diseñados con O-splines, con base en las estimaciones de fase y frecuencia que ofrecen los propios O-splines y sus derivadas. Para ello se desarrolló el diseño matemático del algoritmo y se implementó en MATLAB®, pasando por un proceso de validación en el cual se sometió a diversas pruebas y con base en los resultados se procedió a un proceso de ajustes el cual conllevó al diseño deseado.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: La contribución de este trabajo de tesis es proporcionar un algoritmo seguidor de frecuencia de control digital, diseñado específicamente para sintonizar la frecuencia de los filtros diseñados con O-splines. Dicho algoritmo mejora el rendimiento de los filtros ante variaciones de frecuencia, las cuales hacen que la señal se aleje de la banda plana y por lo tanto las estimaciones comienzan a distorsionarse, en estos casos el algoritmo diseñado en este trabajo de tesis logra que la banda plana del filtro siga a la señal, manteniendo el error dentro de los límites.

Firma del asesor: 
Dr. José Antonio de la O Serna

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La estimación fasorial es fundamental para controlar y monitorear los sistemas eléctricos de potencia. La regulación de los intercambios de potencia en las redes de área amplia, la estabilidad y la protección del sistema dependen de la exactitud y retraso de las estimaciones fasoriales.

En la literatura existen muchos algoritmos de estimación fasorial, siendo los más populares los basados en la Transformada Discreta de Fourier (DFT), ya que logran una alta precisión en estado estable, además de su baja complejidad computacional. Sin embargo, el rendimiento de estos métodos se degrada bajo condiciones dinámicas. La DFT funciona con precisión solo cuando las señales tienen amplitud, fase y frecuencia constantes [1]. Debido a los procesos transitorios en el sistema de energía, donde las señales de voltaje y corriente tienen fluctuaciones rápidas, estas no pueden modelarse satisfactoriamente mediante un modelo fasorial de estado estacionario.

Como alternativa a este problema se propuso en [2] un modelo fasorial dinámico, que consta de amplitud y fase variables en el tiempo. Se propuso una nueva transformada digital, que se designa como Transformada de Taylor-Fourier, la cual sustituye cada coeficiente de Fourier constante de la DFT por un polinomio de Taylor de grado K durante la ventana de tiempo de observación. Esta transformada

mejora la precisión en el análisis de las señales de potencia bajo condiciones oscilatorias, pues brinda como resultado un fasor dinámico que proporciona información adicional (velocidad y aceleración), no brindada antes por el fasor tradicional.

A partir de la Transformada Taylor-Fourier fue descubierta una nueva familia de splines, llamada O-splines [1], con interesantes propiedades. Estas splines y sus derivadas permiten diseñar filtros de respuesta finita al impulso (FIR) pasa banda, que permiten obtener estimaciones fasoriales muy cercanas a las de un filtro pasa banda ideal. Además, es posible diseñar dos diferenciadores FIR para obtener estimaciones de frecuencia y tasa de variación de frecuencia (ROCOF) lo suficientemente cercanas a las de los filtros diferenciadores ideales. Lo anterior con una ligera carga computacional. Sin embargo, ante condiciones de desviación de frecuencia el rendimiento de estos filtros se ve afectado y pueden producirse errores no despreciables. Para minimizar estos errores es necesario sintonizar la frecuencia central del filtro con la frecuencia real, y en esto se enfoca este trabajo de tesis, en diseñar un algoritmo que realice esta tarea eficientemente, y por ende mejorar así las estimaciones fasoriales ante condiciones oscilatorias.

1.1 ANTECEDENTES

Los splines son esenciales en las operaciones de procesamiento de señales digitales, pero no solo en el muestreo y la interpolación, sino también en el diseño de filtros, procesamiento de imágenes y análisis multiresolución. También se han aplicado en el diseño asistido por ordenador para dibujar curvas suaves con una curvatura mínima, para reproducir modelos gráficos y en la representación de superficies [3].

Los splines más conocidos en el área de procesamiento digital de señales son los B-splines [4],[5]. No son splines cardinales, sin embargo, sientan las bases del marco matemático para diseñar la mayoría de los splines cardinales interpolantes modernos, como los llamados B-splines exponenciales o E-splines, o combinaciones

lineales de ellos [1].

En [3] se presenta una nueva clase de splines, los cuales se conocen como O-splines, estos primero se obtuvieron numéricamente en 2018 en [1] para analizar las señales oscilatorias de un sistema de potencia, ya que son muy útiles para detectar oscilaciones, sin embargo, el inconveniente del método numérico es que para órdenes grandes la matriz se hace numéricamente inestable porque su determinante es casi nulo. En [3] se dan en forma cerrada para reducir la complejidad computacional en el análisis de señales limitadas en banda. Se resolvió la inversa de la matriz teóricamente y ahora es posible encontrar O-splines de órdenes arbitrarios y de forma continua. También se utilizaron para analizar electroencefalogramas (EEG) en [6]. En este artículo, se desarrolló un banco de filtros Taylor-Fourier implementado con O-splines para la detección y clasificación de epilepsia a partir de la señal de EEG. A partir de los mismos se pueden diseñar filtros FIR pasa banda que brindan estimaciones fasoriales muy cercanas a las de un filtro pasa banda ideal.

En [7] se propone un filtro FIR diseñado con el O-spline nónico de la Transformada Taylor-Fourier en Tiempo Discreto (DTTFT) para obtener el sincrofasor de señales reales, como las disponibles en un centro de control.

La estimación precisa de los fasores de tensión y corriente es de vital importancia pues la supervisión, el control y la protección de los sistemas de energía se basan en estas estimaciones.

La mayoría de los algoritmos de sincrofasores propuestos en la literatura adoptan un modelo fasorial de estado estable que asume amplitud, fase y frecuencia constantes, dentro de la ventana de observación, lo cual resulta en mediciones distorsionadas ante condiciones oscilatorias. El concepto de fasor dinámico fue propuesto en [2] como la envolvente compleja de la oscilación, interpretada como una señal pasa banda, tal como se usa en sistemas de transmisión digital. Vale la pena mencionar que este trabajo desarrollado en [2] fue el primer paso de una investigación que posteriormente daría como resultado el descubrimiento de los O-splines.

El fasor dinámico dentro de la ventana de observación se expande en una serie de Taylor. Los coeficientes del polinomio de Taylor contienen estimaciones del fasor dinámico y sus derivadas, y pueden calcularse mediante el método de mínimos cuadrados (LS) como fue inicialmente propuesto en [2]. En [8] se usa una ventana de ponderación, mejorando notablemente las prestaciones del método de LS, este método se denomina mínimos cuadrados ponderados (WLS).

La aproximación de Taylor del fasor dinámico produce errores no despreciables ante desviaciones de frecuencia, por lo que la aproximación debe realizarse cerca del valor real de la frecuencia de la señal. Es por ello que se han propuesto algunos métodos de post-procesamiento para mejorar la precisión de la estimación en condiciones no estacionarias. Un algoritmo de WLS simplificado (SWLS), que adopta aproximaciones para reducir la complejidad computacional, se propone en [9]. En [10], las soluciones de WLS para diferentes valores de frecuencia se calculan offline y se utilizan leyéndolos de una tabla de búsqueda. Recientemente, se ha propuesto el algoritmo Tuned Lightweight WLS (TLWLS) [11] que combina las ventajas de la Transformada Taylor-Fourier y la DFT Interpolada (IpDFT), y por lo tanto reduce la complejidad computacional.

En [12] se presenta un algoritmo que mejora la estimación de fasores y frecuencias de un sistema de potencia en condiciones de funcionamiento fuera del estado estacionario. El algoritmo propuesto puede verse como una aproximación de baja complejidad del método de WLS convencional y por ende se denomina mínimos cuadrados ponderados de baja complejidad (LCWLS).

A continuación se resumen en una tabla las principales investigaciones que sirvieron como antecedentes a este trabajo de tesis.

TABLA 1.1: Principales antecedentes

| Artículo | Autor | Año |
|--|-----------------------------|------|
| Dynamic phasor estimates for power system oscillations. | J. A. de la O Serna | 2007 |
| Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators. | M. A. Platas-Garza, et al. | 2009 |
| A dynamic synchrophasor estimation algorithm for online application. | R. Mai, et al. | 2010 |
| Dynamic phasor and frequency measurements by an improved Taylor weighted least squares algorithm. | D. Belega, et al. | 2015 |
| Low-complexity least-squares dynamic synchrophasor estimation based on the discrete Fourier transform. | D. Belega, et al. | 2015 |
| A modified dynamic synchrophasor estimation algorithm considering frequency deviation. | L. Fu, et al. | 2016 |
| Analyzing power oscillating signals with the O-splines of the discrete Taylor–Fourier transform. | J. A. de la O Serna | 2018 |
| Dynamic harmonic analysis with FIR filters designed with O-splines. | J. A. de la O Serna | 2020 |
| EEG-rhythm specific Taylor–Fourier filter bank implemented with O-splines for the detection of epilepsy using EEG signals. | J. A. de la O Serna, et al. | 2020 |
| Assessing synchrophasor estimates of an event captured by a phasor measurement unit. | J. A. de la O Serna, et al. | 2020 |
| An efficient phasor and frequency estimation algorithm for wide frequency range. | Ž. Zečević, et al. | 2020 |

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La precisión de la estimación fasorial se evalúa con el Error Vectorial Total (TVE) definido en el vigente Estándar Internacional de Sincrofasores para Sistemas de Potencia 60255-118-1:2018 [13]. Los errores máximos en las estimaciones que ofrecen los filtros diseñados con O-splines están por debajo de los errores de referencia que permite el estándar. Sin embargo, estos errores pudieran ser no despreciables ante condiciones de desviación de frecuencia, y por ende las estimaciones realizadas perderán precisión. Estos errores pudieran reducirse, ajustando la frecuencia de operación exactamente a la de la señal, propiciando así la óptima operación de los filtros.

En la literatura no se ha reportado hasta el momento ningún estudio relacionado con el diseño de un algoritmo de sincronización de frecuencia para filtros diseñados con estos splines. Por lo tanto, resolver este problema aprovechando las propiedades que nos brindan los propios O-splines es la principal motivación de este proyecto, y por ende, motivados también por todas las posibles aplicaciones que pudieran tener estos filtros en el futuro.

1.3 OBJETIVO GENERAL

Diseñar un algoritmo de control digital para sintonizar la frecuencia de filtros pasa banda diseñados con O-splines.

1.4 OBJETIVOS PARTICULARES

1. Diseñar un algoritmo para sintonizar la frecuencia de filtros pasa banda diseñados con O-splines, con base en las estimaciones de fase y frecuencia que

ofrecen los propios O-splines y sus derivadas.

2. Evaluar el rendimiento de dicho algoritmo utilizando las señales de prueba del estándar 60255-118-1:2018 de sincrofasores.

1.5 HIPÓTESIS

Será posible sintonizar la frecuencia central de los filtros pasa banda diseñados con O-splines, con la frecuencia real, mediante la implementación de un nuevo algoritmo de sincronización de frecuencia, el cual será desarrollado a partir de las estimaciones de fase y frecuencia que ofrecen los propios O-splines y sus derivadas, logrando así que las ganancias máximamente lisas cubran mejor la densidad espectral de la señal, y en consecuencia los parámetros estimados serán más precisos.

1.6 JUSTIFICACIÓN

La reciente familia de splines denominada O-splines [1] [3], fue descubierta al reducir la complejidad computacional de la DTTFT, con interesantes propiedades de muestreo de estados (state sampling). Estos splines operan en la etapa de análisis, por lo que funcionan junto con sus derivadas como muestreadores de estado de señal óptimos, en el sentido de que sus coeficientes en cada instancia de tiempo proporcionan las derivadas de señal para su mejor aproximación de Taylor, dada por la ecuación de síntesis. Esta es una diferencia importante con respecto a la mayoría de los splines, cuya literatura está consagrada a su desempeño como interpoladores. Los O-splines se aplican como operadores de muestreo, el inverso de los interpoladores. Obtienen los mejores coeficientes de Taylor-Fourier, con significado físico de posición, velocidad, aceleración, etc. Al estar en la base dual biortogonal, establecen un proceso híbrido de análisis-síntesis, haciendo que los O-splines sean únicos, útiles y efectivos.

En forma cerrada, reducen la complejidad computacional de la DTTFT y pueden usarse para diseñar filtros FIR pasa banda a una frecuencia particular, muy cercanos a los filtros ideales, los cuales pueden mejorar su rendimiento aún más si se incluye un algoritmo que sintonice la frecuencia real de la señal con la frecuencia central del filtro, en casos de desviación de frecuencia. El algoritmo se puede desarrollar aprovechando la propia naturaleza matemática de los O-splines y sus derivadas, en el sentido de que brindan estimaciones de frecuencia y de tasa de variación de frecuencia, con una ligera carga computacional, por lo que, con base en estas propiedades se puede desarrollar un novedoso algoritmo, el cual a su vez debe ser sometido a evaluación utilizando las señales de prueba del estándar 60255-118-1:2018 de sincrofasores.

Debido a su reciente descubrimiento no se han explotado del todo las propiedades que poseen los O-splines en las disímiles aplicaciones en las que pudieran ser útiles. Estos filtros podrían tener aplicación en sistemas de transmisión digital de diferentes canales adyacentes, ya que poseen bandas de paro en frecuencias múltiples de la frecuencia central. Aquí se abre una brecha de investigación, la cual trae nuevos desafíos y oportunidades en esta área del conocimiento.

CAPÍTULO 2

NOCIONES PRELIMINARES

Resulta conveniente mostrar al lector algunos conocimientos previos provenientes de campos de estudios como el procesamiento de señales y las matemáticas avanzadas. Estas nociones serán utilizadas en los desarrollos presentados en los posteriores capítulos del presente trabajo de tesis.

En las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 se presentan las definiciones de la Transformada de Fourier y la Serie de Taylor, como herramientas matemáticas imprescindibles para comprender el desarrollo de la DTTFT. En 2.4 se define el concepto de splines polinomiales. En 2.5 se introducen los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), y por último en la sección 2.6 se presenta la convolución, herramienta usada en el proceso de estimación sincrofasorial.

2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

DEFINICIÓN 2.1 *La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de una secuencia $x(n)$ es:*

$$X(e^{jw}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-jwn}, \quad w \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Existe cuando (2.1) converge para todo $w \in \mathbb{R}$, y lo llamamos espectro de $x(n)$. La DTFT inversa de una función periódica $X(e^{jw})$ de período 2π es:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Cuando la DTFT existe denotamos el par DTFT como:

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{jw})$$

Dado que e^{-jwn} es una función periódica de período 2π , función de w para cada $n \in \mathbb{Z}$, la DTFT es siempre una función periódica de período 2π , lo cual se enfatiza con la notación $X(e^{jw})$ [14].

2.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

DEFINICIÓN 2.2 La Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una secuencia $x(n)$ de longitud N es:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{kn} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x})_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2.3)$$

y lo llamamos espectro de $x(n)$. La DFT inversa de una secuencia $X(k)$ de longitud N es:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{-kn} = \frac{1}{N} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{X})_n, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2.4)$$

donde $w_N = e^{-j2\pi/N}$.

Denotamos el par DFT como:

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

Dentro de la definición, hemos introducido $\mathbf{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ para representar el operador lineal DFT. La relación entre el inverso y el adjunto en (2.4) se verifica en breve [14].

La expresión DFT (2.3) es el producto vector-vector:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & w_N^k & \cdots & w_N^{(N-1)k} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ es un vector columna. Al reunir los resultados para $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ para producir el vector columna $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$, tenemos:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ introducida en (2.3) es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Usando ortogonalidad, podemos verificar que:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^* \quad (2.9)$$

como se afirma en (2.4). Esto muestra que la DFT es un operador unitario [14]. La matriz \mathbf{F} también es una matriz de Vandermonde (Ver Apéndice A).

2.3 SERIE DE TAYLOR

DEFINICIÓN 2.3 *La serie de Taylor de una función es su representación mediante una serie de potencias de $(x - a)$ de la forma:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a)'}{1!}(x-a) + \frac{f(a)''}{2!}(x-a)^2 + \frac{f(a)'''}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f(a)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad (2.10)$$

para que este desarrollo en serie de Taylor sea posible es necesario que tanto la función como todas sus derivadas estén definidas para $x = a$.

Lo que se pretende mediante la serie de Taylor es aproximar una función cualquiera $f(x)$ mediante un polinomio, sin embargo, salvo que $f(x)$ sea de entrada un polinomio, la aproximación nunca será exacta, a no ser que se usen polinomios con infinitos términos. En la práctica, obviamente, no se usan polinomios infinitos, se

usan series truncadas, las cuales se llaman aproximaciones de orden n . La aproximación se va haciendo menos exacta a medida que x se aleja del punto central a [15].

2.4 FUNCIONES SPLINE POLINOMIALES

A grandes rasgos, un spline es una curva diferenciable definida a trozos mediante polinomios. Definamos primero un polinomio a trozos:

DEFINICIÓN 2.4 Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$ y $\Delta = \{x_i\}_0^{k+1}$. El conjunto Δ particiona el intervalo $[a, b]$ en $k+1$ subintervalos, $I_i = [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, e $I_k = [x_k, x_{k+1})$. Dado un entero positivo m sea

$$\wp_m(\Delta) = \{f: \text{existen polinomios } p_0, p_1, \dots, p_k \text{ en } \wp_m \text{ con } f(x) = p_i(x), \text{ para } x \in I_i, \\ i = 0, 1, \dots, k\}. \quad (2.11)$$

Llamamos $\wp_m(\Delta)$ al espacio de polinomios por trozos de orden m , con nodos x_1, \dots, x_k .

Para mantener la flexibilidad de los polinomios por trozos y al mismo tiempo lograr cierto grado de suavidad en las curvas, podemos definir la siguiente clase de funciones:

DEFINICIÓN 2.5 Sea Δ una partición del intervalo $[a, b]$ como en la Definición 2.4, y sea m un entero positivo. Sea

$$\mathfrak{S}_m(\Delta) = \wp_m(\Delta) \cap C^{m-2}[a, b] \quad (2.12)$$

donde $\wp_m(\Delta)$ es el espacio de polinomios por trozos definido en 2.4. Llamamos $\mathfrak{S}_m(\Delta)$ al espacio de splines polinomiales de orden m , con nodos simples en los puntos x_1, \dots, x_k .

Es fácil definir varias clases relacionadas de polinomios por trozos con diferentes grados de suavidad entre las partes. Nos referimos a tales espacios de funciones como splines polinomiales [16].

2.5 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO O INVARIANTES A DESPLAZAMIENTOS

Una clase de sistemas en tiempo discreto particularmente importante es la de los sistemas lineales invariantes en el tiempo o invariantes a desplazamientos (LTI). La combinación de estas dos propiedades conduce a representaciones especialmente convenientes de los sistemas que las cumplen. Y lo que es más importante, esta clase de sistemas tiene importantes aplicaciones en el tratamiento de señales [17].

Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si su característica de entrada–salida no cambia con el tiempo. Por lo tanto, en términos más formales [18]:

DEFINICIÓN 2.6 *Un sistema en reposo τ es invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos si y solo si:*

$$x(n) \xleftrightarrow{\tau} y(n)$$

lo que implica que:

$$x(n - k) \xleftrightarrow{\tau} y(n - k)$$

para cualquier señal de entrada $x(n)$ y cualquier desplazamiento temporal k .

Un sistema lineal es aquel que satisface el principio de superposición, el cual exige que la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales, sea igual a la correspondiente suma ponderada de las respuestas (salidas) del sistema a cada una de las señales individuales de entrada. Por tanto, tenemos la siguiente definición de linealidad [18]:

DEFINICIÓN 2.7 *Un sistema es lineal si y sólo si*

$$\tau[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\tau[x_1(n)] + a_2\tau[x_2(n)] \quad (2.13)$$

para cualesquiera secuencias de entrada arbitrarias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2 .

2.6 CONVOLUCIÓN

La fórmula de la convolución nos proporciona un medio para calcular la respuesta de un sistema LTI en reposo a cualquier señal de entrada $x(n)$ arbitraria, mediante las siguientes fórmulas, las cuales son equivalentes:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = h(n) * x(n) \quad (2.14)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-n)h(k) = x(n) * h(n) \quad (2.15)$$

La evaluación de las fórmulas (2.14) y (2.15) implica 4 operaciones:

1. Reflexión de $h(k)$ para obtener $h(-k)$, o de $x(k)$ para obtener $x(-k)$, según la ecuación que se use.

2. Desplazamiento de la secuencia reflejada n unidades para proporcionar $h(n-k)$ o $x(n-k)$.
3. Multiplicación de las dos secuencias para obtener la secuencia producto $v(k) = x(k)h(n-k)$ o $v(k) = x(n-k)h(k)$.
4. Suma de todos los valores de la secuencia producto para obtener el valor de la salida $y(n)$ en el instante n .

Este procedimiento proporciona la respuesta del sistema en un determinado instante de tiempo n . En general, estaremos interesados en evaluar la respuesta del sistema en todos los instantes de tiempo del intervalo $-\infty < n < \infty$. Por tanto, los pasos 2 hasta 4 deben repetirse para todos los posibles valores del desplazamiento temporal $-\infty < n < \infty$.

Las fórmulas dadas por (2.14) y (2.15), que proporcionan la respuesta $y(n)$ del sistema LTI como una función de la señal de entrada $x(n)$ y de la respuesta al impulso $h(n)$, se denominan suma de convolución. Decimos que la entrada $x(n)$ se convoluciona con la respuesta al impulso $h(n)$ para proporcionar la salida $y(n)$ [18].

CAPÍTULO 3

O-SPLINES

Durante las últimas décadas, la teoría de splines ha experimentado un desarrollo vertiginoso que se debe principalmente a su gran utilidad en muchísimas aplicaciones. Dado que son fáciles de evaluar y manipular en una computadora, se ha encontrado una miríada de aplicaciones a la solución numérica de una variedad de problemas en matemáticas aplicadas. La enorme literatura publicada muestra que el desarrollo de la teoría de splines tiene una influencia esencial en grandes áreas de la matemática y la ingeniería moderna, tales como: ajuste, interpolación y aproximación de datos, integración y diferenciación numérica, teoría de control, diseño geométrico asistido por ordenador y geometría computacional, métodos numéricos de teoría de probabilidades y estadística, wavelets y muchas otras, expandiendo cada día más sus áreas de aplicación [19].

Una nueva familia de splines nombrada O-splines fue presentada en [1], [3]. Fue descubierta al reducir la complejidad computacional de la DTTFT; esta transformada a su vez, surgió como herramienta para analizar las señales oscilantes en los sistemas de potencia, mediante el concepto del fasor dinámico, originalmente propuesto en [2]. Es por ello, que para comprender los O-splines debidamente es necesario presentar primero estos conceptos, ya que este trabajo [2] es la génesis de lo que más adelante conllevaría al descubrimiento de estos splines.

3.1 FASOR DINÁMICO

Antes que saliera a la luz la referencia [2], las técnicas de estimación fasorial normalmente asumían un modelo de señal sinusoidal con amplitud y fase constantes durante todo el intervalo de observación, suponiendo así estado estacionario:

$$x(t) = a_0 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0), \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (3.1)$$

donde a_0 y φ_0 son la amplitud y la fase constantes respectivamente, y f_1 y T son la frecuencia y el período fundamental respectivamente de la señal $x(t)$.

Este modelo se puede reescribir en términos de la función exponencial compleja como:

$$x(t) = \operatorname{Re}(a_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j2\pi f_1 t}) = \operatorname{Re}(\xi \cdot e^{j2\pi f_1 t}) \quad (3.2)$$

donde $\xi = a_0 \cdot e^{j\varphi_0}$ es el fasor de la señal $x(t)$.

Esta suposición es muy limitada para las oscilaciones de potencia. Las oscilaciones de amplitud y fase en los sistemas de potencia se pueden modelar mejor mediante una señal pasa banda de la forma:

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (3.3)$$

donde $a(t)$ y $\varphi(t)$ son la amplitud y la fase expresadas como funciones del tiempo. En una señal pasa banda, el contenido en frecuencia se concentra en una banda estrecha en la vecindad de la frecuencia fundamental f_1 , al igual que en una oscilación de potencia.

En términos de la función exponencial compleja se puede reescribir como:

$$x(t) = \text{Re}(a(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j2\pi f_1 t}) = \text{Re}(\xi(t) \cdot e^{j2\pi f_1 t}) \quad (3.4)$$

donde $\xi(t) = a(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$ es la envolvente compleja de la señal pasa banda $x(t)$ y se denomina fasor dinámico de la oscilación.

En [2] se propone aproximar el fasor dinámico $\xi(t)$ mediante un polinomio de Taylor en cada intervalo de tamaño T . La única condición necesaria para que esta aproximación sea válida es que el fasor dinámico debe estar dado por una función analítica.

En este artículo se usó un polinomio de segundo grado para aproximar $\xi(t)$ en el intervalo centrado en $t_0 = 0$:

$$\xi_2(t) = \xi_2(0) + \xi_2(0)'t + \frac{\xi_2(0)''}{2}t^2, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (3.5)$$

donde $\xi_2(0), \xi_2(0)', \xi_2(0)'' \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$. Los coeficientes del polinomio de Taylor son las derivadas progresivas del fasor dinámico en el centro del intervalo.

Esta aproximación aumenta su precisión a medida de que $t \rightarrow 0$, siendo exacta en el límite. Se pueden aplicar polinomios de Taylor de orden superior para aumentar la exactitud de la aproximación, pero en [2] los coeficientes de la función cuadrática proporcionaron estimaciones adecuadas para los propósitos deseados, por lo tanto, se usó una aproximación de segundo orden.

3.2 SUBESPACIO DIGITAL TAYLOR-FOURIER

La extensión del fasor estático al fasor dinámico conlleva a la extensión del subespacio de Fourier al subespacio de Taylor-Fourier [20]. En esta sección, la formulación matricial de la DTFT se desarrolla utilizando un paralelismo con la DFT.

Explicaremos esta extensión partiendo del modelo de señal de Fourier tradicional de orden cero en forma matricial:

$$\mathbf{x}_0 = \Phi_0 \cdot \xi_0 \quad (3.6)$$

esta es la ecuación de síntesis de \mathbf{x}_0 , donde ξ_0 contiene los coeficientes de Fourier de \mathbf{x}_0 , y Φ_0 es la matriz de Fourier \mathbf{W}_N , la cual se muestra en la ecuación (3.7). Esta matriz contiene $N \times N$ elementos de la forma $(e^{j\frac{2\pi}{N}})^{nk} = (w_N)^{nk}$, para $n, k = 0, 1, \dots, N-1$, siendo N el número de muestras por ciclo fundamental, n la n -ésima muestra y k el k -ésimo armónico.

$$\mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Este modelo tradicional solo toma en cuenta el primer término del polinomio de Taylor, o sea ξ_0 , que es un polinomio de orden cero. Este procedimiento es conocido como filtrado de Fourier de un ciclo, pues cada intervalo de observación tiene longitud de un ciclo fundamental.

Esta aproximación mediante un polinomio de Taylor de orden cero en cada intervalo de observación, genera una función escalón, con cambios de escalón de un intervalo a otro, como resultado de la aproximación del fasor, pues podría haber cambios en los parámetros de la forma de onda durante un intervalo, por lo que la estimación representará un valor promedio en esa ventana de observación. Este modelo solo es adecuado cuando la señal de entrada está en estado estable.

Extendemos este subespacio al subespacio Taylor-Fourier al incluir los términos de Taylor, y lo hacemos utilizando los vectores de la matriz de Fourier \mathbf{W}_N

como moduladores armónicos de los términos de Taylor, que son los que modelan la envolvente de la oscilación. Al aumentar a un orden superior, el tamaño del modelo aumenta en N , ya que cada término de Taylor afecta al conjunto completo de armónicos, y por lo tanto, se necesita otro ciclo fundamental de datos en la parte inferior de la matriz Φ . De manera general para un determinado orden K vamos a necesitar prolongar los vectores de la base a $C = K + 1$ ciclos. De esta forma, la nueva matriz, la matriz de Taylor-Fourier, será de $(K + 1)N \times (K + 1)N$ elementos, como veremos más adelante. La matriz base tiene C matrices verticales, cada una formada a su vez por C submatrices de Fourier \mathbf{W}_N , una debajo de la otra, cada una de estas submatrices tiene vectores armónicos de longitud N , que modularán los términos de Taylor que están en las C matrices diagonales de la forma $\frac{1}{k!} \mathbf{T}^k$, para $k = 0, \dots, K$.

Entonces el modelo de señal de primer orden ($K = 1$, $C = 2$) quedaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_1 = \Phi_1 \cdot \xi_1 = \left(\mathbf{I} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{I} y \mathbf{T} son matrices diagonales que contienen las muestras de los términos de Taylor de orden cero y primer orden respectivamente tomadas en intervalos centrados de longitud de dos ciclos fundamentales. El subvector ξ contiene los N coeficientes de Taylor-Fourier de primer orden, y sus respectivas derivadas se encuentran en el subvector $\dot{\xi}$. Esta es la ecuación de síntesis de \mathbf{x}_1 en términos de sus coeficientes Taylor-Fourier $(\xi, \dot{\xi})$, los cuales serán obtenidos a partir de la Transformada Taylor-Fourier (ecuación de análisis) de \mathbf{x}_1 , como se verá más adelante.

El modelo de señal correspondiente a la extensión para el K -ésimo orden puede ser generalizado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_K = \Phi_K \cdot \xi_K = \left(\mathbf{I} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \cdots \frac{1}{K!} \mathbf{T}^K \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{k} \\ \xi \\ \vdots \\ \mathbf{k} \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde la matriz Φ_K de $(K+1)N \times (K+1)N$ elementos contiene la base vectorial del subespacio extendido, el subvector ξ contiene los N coeficientes de Taylor-Fourier de K -ésimo orden y los K subvectores \mathbf{k} de longitud N , con $k = 1, \dots, K$, contienen las derivadas progresivas de ξ .

Cuando extendemos el modelo tradicional de Fourier al modelo Taylor-Fourier la base Φ_K ya no es ortogonal debido a la oblicuidad introducida por los términos de Taylor, por lo que para $K \geq 1$ es necesario un par de bases biortonormales, la base Φ_K para la ecuación de síntesis:

$$\mathbf{x}_K = \Phi_K \cdot \xi_K \quad (3.10)$$

Esta es la Transformada Inversa Taylor-Fourier de \mathbf{x}_K . Y su dual, $\tilde{\Phi}_K$ para la ecuación de análisis:

$$\hat{\xi}_K = \tilde{\Phi}_K^H \cdot \mathbf{x}_K \quad (3.11)$$

Esta es la Transformada Taylor-Fourier de \mathbf{x}_K , la cual nos brinda los mejores coeficientes LMS ($\hat{\xi}_K$) de la proyección de la señal \mathbf{x}_K en el subespacio Taylor-Fourier.

$\tilde{\Phi}_K$ es la matriz dual y esta dada por:

$$\tilde{\Phi}_K = \Phi_K \cdot (\Phi_K^H \cdot \Phi_K)^{-1} \quad (3.12)$$

tal que $\tilde{\Phi}_K^H \cdot \Phi_K = \mathbf{I}$.

En [21] se propuso la descomposición de la matriz $\Phi_{\mathbf{K}}$ de la siguiente manera:

$$\Phi_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot \Omega_{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_1 & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_1^K \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_C & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_C^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde las submatrices de la forma $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}$, de $N \times N$, siendo $c = 1, \dots, C$, son las correspondientes submatrices diagonales descendientes en la matriz \mathbf{T} en (3.9), que contienen las muestras respectivas de cada uno de los C ciclos. Generalizando podemos decir que $\frac{1}{k!} \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^k$ contiene los términos de Taylor de k -ésimo orden correspondientes al c -ésimo ciclo, siendo $k = 1, \dots, K$ y $c = 1, \dots, K + 1$.

En esta descomposición $\Phi_{\mathbf{K}}$ queda separada en dos matrices: $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ para el operador de Taylor y $\Omega_{\mathbf{K}}$ para el operador de Fourier. Esta factorización reduce la complejidad computacional en el cálculo de $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$ en (3.12), pues se reduce a [21]:

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot (\Upsilon_{\mathbf{K}}^H \cdot \Upsilon_{\mathbf{K}})^{-1} \cdot \frac{\Omega_{\mathbf{K}}}{N} = \tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} \cdot \frac{\Omega_{\mathbf{K}}}{N} \quad (3.14)$$

A partir de esta ecuación podemos ver claramente que los vectores en $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$ son modulaciones armónicas de las subdiagonales de $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ en el conjunto de frecuencias armónicas en $\Omega_{\mathbf{K}}$. Esta contribución es importante para aplicaciones en las que la energía está contenida en un pequeño número de frecuencias, como las señales de los sistemas eléctricos de potencia [1].

Entonces, al factorizar el modelo de señal de la DTFT, como vimos en las ecuaciones (3.13) y (3.14), los O-splines paso bajo y sus derivadas, que también son splines, fueron encontrados en las subdiagonales de la matriz dual del operador de Taylor $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$:

$$\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot (\Upsilon_{\mathbf{K}}^H \cdot \Upsilon_{\mathbf{K}})^{-1} = (\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1})^T \quad (3.15)$$

Esta matriz dual es simplemente la inversa transpuesta del operador de Taylor, pues la ecuación (3.12) es una fórmula genérica para cualquier matriz que lo que hace es calcular una pseudoinversa, pero si la matriz es cuadrada su dual es simplemente su inversa transpuesta.

3.3 RESPUESTA AL IMPULSO Y RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS DTFT

Como la respuesta al impulso de los filtros de la DTFT, que están en $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$, en cada frecuencia armónica, son simplemente versiones moduladas de la respuesta de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ (como se puede ver en la ecuación (3.14) en la sección anterior), enfocamos entonces nuestra atención en estos filtros para comprender la evolución de los operadores de la DTFT.

La matriz $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$, la cual es una combinación lineal de los vectores en $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ y por lo tanto preserva la misma estructura, es una matriz cuadrada de $(K+1)N \times (K+1)N$ elementos, compuesta por submatrices diagonales. Esta matriz se puede dividir en $K+1$ bloques de N columnas cada uno, cada bloque contiene $K+1$ submatrices diagonales, colocadas unas debajo de las otras. Las subdiagonales del primer bloque contienen la respuesta al impulso de los filtros paso bajo, o sea los O-splines. El segundo bloque contiene en sus subdiagonales la respuesta al impulso del primer diferenciador paso bajo, o sea las derivadas de los splines previos. El tercer bloque contiene la respuesta al impulso del segundo diferenciador paso bajo, y así sucesivamente.

La figura 3.1 (a) muestra la respuesta al impulso de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ para diferentes órdenes de Taylor: $K = 0, \dots, 9$. Fueron calculadas con $N = 20$

muestras por ciclo fundamental. A partir de la ecuación (3.15) se puede demostrar que forman una nueva familia de splines de $C = K + 1$ ciclos. Los dos primeros se corresponden con los B-splines de orden cero y primer orden respectivamente, pero luego difieren para $K \geq 2$, ya que convergen al seno cardinal. Comienzan con la ventana rectangular, correspondiente al filtro de Fourier tradicional de un ciclo, luego la ventana triangular de dos ciclos, y luego evolucionan hacia la función *Sinc* a medida que K aumenta [1].

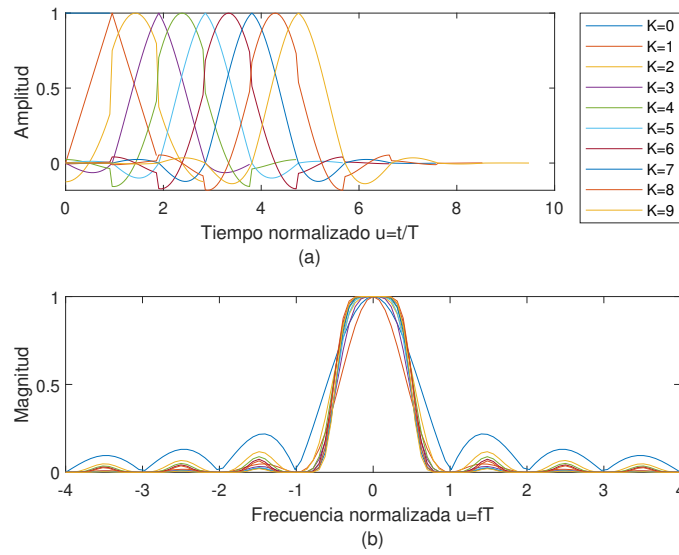


FIGURA 3.1: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo para $K = 0, \dots, 9$.

La figura 3.1 (b) ilustra la respuesta en frecuencia de los O-splines. Como podemos ver, la secuencia comienza con la función seno cardinal correspondiente a la ventana rectangular. Después comienzan a tener bandas de paso cada vez más planas, y bandas eliminadas con ganancia cero cada vez más planas también. Esta característica es muy importante para rechazar las interferencias armónicas.

Para poder apreciar mejor la evolución de los filtros y su espectro al aumentar el orden K de Taylor, en la figura 3.2 se muestran por separado los O-splines de órdenes impares hasta $K = 9$, con sus respectivas respuestas en frecuencia debajo, y lo mismo se muestra en la figura 3.3 para los O-splines pares hasta $K = 8$.

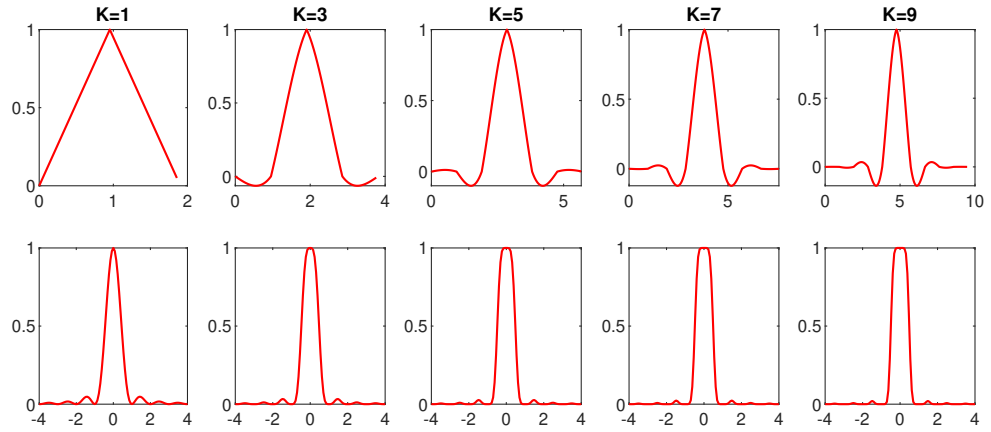


FIGURA 3.2: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes impares $K = 1, \dots, 9$.

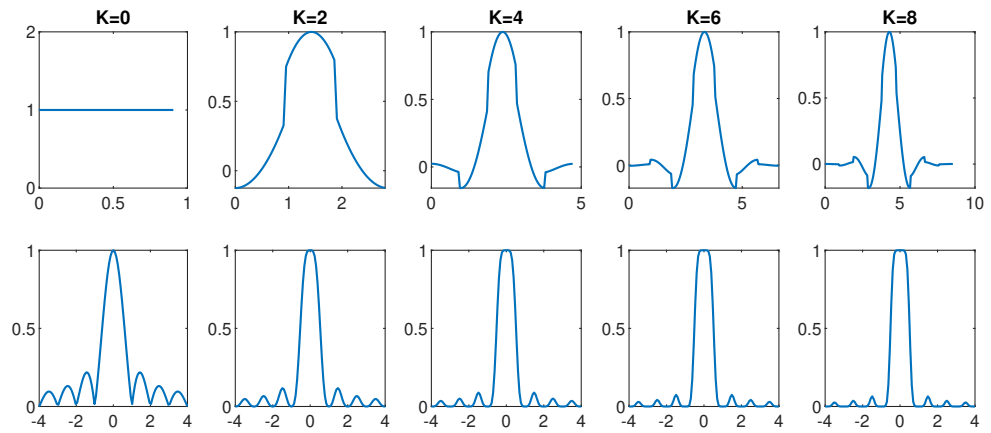


FIGURA 3.3: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes pares $K = 0, \dots, 8$.

Como se puede apreciar en la figura 3.2 los O-splines paso bajo de orden impar proporcionan una familia de filtros FIR que convergen al filtro paso bajo ideal. Cada pieza polinomial se aproxima a un lóbulo de la función *Sinc*. La respuesta en frecuencia tiene una ganancia monótona en la banda de paso y pequeños rizados en la banda eliminada, similar a los filtros de Chebyshev Tipo II IIR. A medida que aumenta el orden K de Taylor, estos filtros proporcionan una nueva secuencia de aproximación al filtro ideal [3].

Los O-splines paso bajo de orden par también convergen a la función *Sinc*, pero tienen discontinuidades que producen rizados más altos en su banda eliminada, como se puede ver en la figura 3.3.

3.4 DIFERENCIADORES PASO BAJO

Los filtros de la DTFT también incluyen sus propios diferenciadores, como veremos en esta sección.

La parte superior de la figura 3.4 muestra las respuestas al impulso de los primeros diferenciadores paso bajo en $\tilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{K}}$. Nótese que son splines discontinuos, que se obtienen de la primera derivada de los anteriores. Su respuesta en frecuencia se muestra en la parte inferior de la figura 3.4.

Si $H_k^{(0)}(f)$ es la respuesta en frecuencia del k -ésimo filtro paso bajo, entonces la respuesta en frecuencia del primer diferenciador será $H_k^{(1)}(f) = (j2\pi f)^1 H_k^{(0)}(f)$, por lo tanto, su respuesta en frecuencia tiene una ganancia lineal en su banda de paso. Nótese que los filtros pares tienen lóbulos laterales más altos que los impares.

De manera similar, las respuestas al impulso de los segundos diferenciadores se muestran en la parte superior de la figura 3.5. De nuevo, son splines discontinuos, que son las derivadas de los precedentes. Sus respuestas en frecuencia se muestran en la parte inferior de la figura 3.5. Estas tienen una ganancia parabólica en la banda

de paso ya que $H_k^{(2)}(f) = (j2\pi f)^2 H_k^{(0)}(f)$ [1].

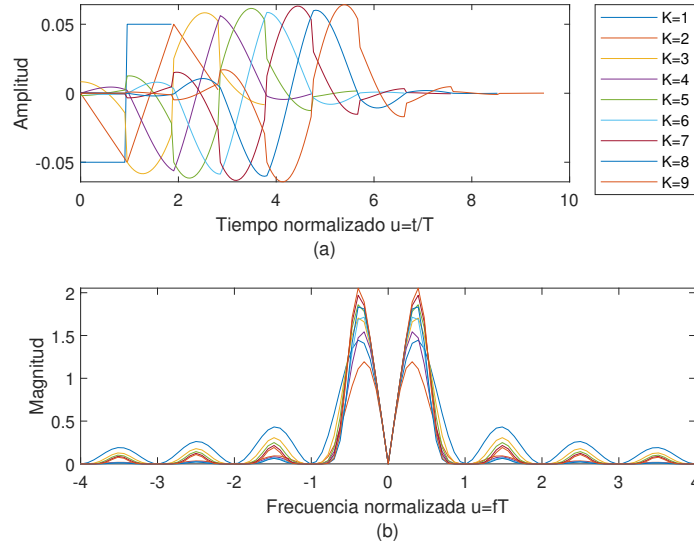


FIGURA 3.4: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los primeros diferenciadores para $K = 1, \dots, 9$.

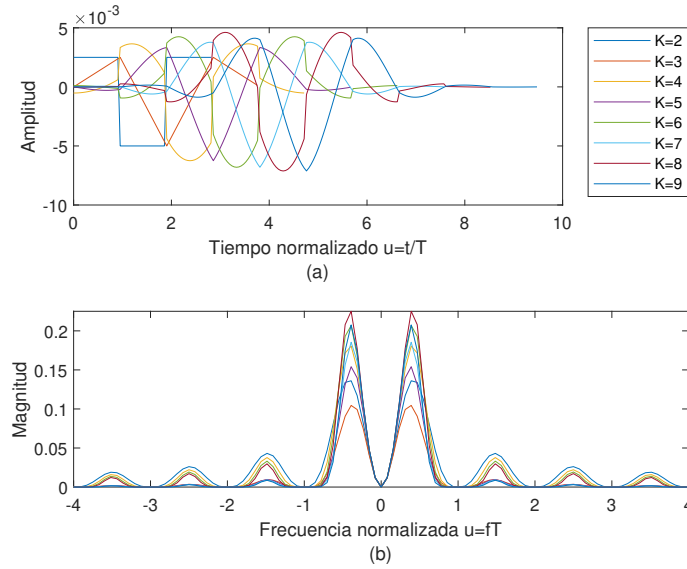


FIGURA 3.5: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los segundos diferenciadores para $K = 2, \dots, 9$.

3.5 O-SPLINES PASO BAJO EN FORMA CERRADA

Los O-splines primero se obtuvieron numéricamente en 2018 en [1], sin embargo, el inconveniente del método numérico es que para órdenes grandes la matriz se hace numéricamente inestable porque su determinante es casi nulo. En [3] se resolvió la inversa de la matriz teóricamente y ahora es posible encontrar O-splines de órdenes arbitrarios y de forma continua, a partir de su expresión en forma cerrada.

Los O-splines y sus derivadas son la respuesta al impulso de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$. Como $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ es una matriz real cuadrada invertible, su dual es simplemente la transpuesta de su inversa, que se puede calcular mediante la fórmula de Cramer:

$$\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} = (\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1})^T = \frac{(\text{Adj}(\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1}))^T}{|\Upsilon_{\mathbf{K}}|} \quad (3.16)$$

La multiplicación de las submatrices diagonales $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^k$ en el operador de Taylor $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ da como resultado el producto puntual de sus diagonales. En consecuencia, $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ puede compactarse en una matriz $C \times C$ sustituyendo cada submatriz diagonal $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^k$ por el k -ésimo término de Taylor como una función de tiempo evaluada en su correspondiente c -ésimo segmento. La inversa de esa matriz compacta puede obtenerse fácilmente ya que esas funciones actúan como cofactores en la inversión.

A continuación, el K -ésimo O-spline paso bajo y sus primeras derivadas se obtienen en forma cerrada a partir del numerador en (3.14) cuando cada submatriz $\mathbf{W}_{\mathbf{N}}$ se reduce a su primera columna de unos. La submatriz obtenida se denota por $\tilde{\Phi}_0$, ya que esta operación convierte las diagonales en cada fila de $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ en un vector que concatena tales diagonales en un polinomio por trozos. Las diagonales de la primera fila proporcionan el spline y las de las filas siguientes sus primeras derivadas. Los O-splines pasa banda o armónicos son simplemente modulaciones de los O-splines paso bajo y sus derivadas en cada frecuencia armónica [3].

Para $K = 0$, tenemos $t_1 = t[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ y $\Phi_0^{(0)} = 1$, por lo tanto $\tilde{\Phi}_0^{(0)} = 1$. El

sistema es ortogonal y el spline es un pulso rectangular:

$$\tilde{\varphi}_0^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } \frac{-T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.17)$$

Para $K = 1$, tenemos $t_1 = t[-T_1, 0)$ y $t_2 = t[0, T_1) = t_1 + T_1$, entonces:

$$\Phi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

y,

$$|\Phi_0^{(1)}| = t_2 - t_1 = T_1 \quad (3.19)$$

Entonces:

$$\tilde{\Phi}_0^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix}}{T_1} = \begin{pmatrix} u_1 + 1 & -F_1 \\ -(u_2 - 1) & F_1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

donde u_n es el tiempo normalizado: $u = t_n/T_1$. Sus columnas son el pulso triangular:

$$\tilde{\varphi}_0^{(1)}(u) = \begin{cases} u + 1, & \text{para } -1 \leq u < 0 \\ -(u - 1), & \text{para } 0 \leq u < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.21)$$

Para $K = 2$, tenemos $t_1 = t[\frac{-3T_1}{2}, \frac{-T_1}{2})$, $t_2 = t_1 + T_1$ y $t_3 = t_1 + 2T_1$, entonces:

$$\Phi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2/2 \\ 1 & t_2 & t_2^2/2 \\ 1 & t_3 & t_3^2/2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y,

$$|\Phi_0^{(2)}| = T_1^3 \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Phi}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_1 + 2)(u_1 + 1) & -F_1(u_1 + \frac{3}{2}) & F_1^2 \\ -(u_2 + 1)(u_2 - 1) & 2F_1u_2 & -2F_1^2 \\ \frac{1}{2}(u_3 - 1)(u_3 - 2) & -F_1(u_3 - \frac{3}{2}) & F_1^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}_0^{(2)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u + 2)(u + 1), & \text{para } -3/2 \leq u < -1/2 \\ -(u + 1)(u - 1), & \text{para } -1/2 \leq u < 1/2 \\ \frac{1}{2}(u - 1)(u - 2), & \text{para } 1/2 \leq u < 3/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

En las ecuaciones (3.20) y (3.24) se puede ver que es suficiente calcular la primera columna de la matriz dual, ya que las siguientes son las derivadas negativas de las anteriores, escaladas por factores constantes. De hecho, dado que la primera columna tiene simetría uniforme, solo se necesita su primera mitad.

A partir de (3.22) se puede ver que $\Phi_0^{(K)}$ es una matriz de Vandermonde con columnas escaladas. En el Apéndice A se demuestra que su determinante es $|\Phi_0^{(K)}| = T_1^{\frac{K(K+1)}{2}}$ [3].

Para $K = 3$, tenemos $t_1 = t[-2T_1, -T_1]$, $t_n = t_1 + (n - 1)T_1$, con $n = 2, 3, 4$, entonces:

$$|\Phi_0^{(3)}| = T_1^6 \quad (3.26)$$

A partir de la primera columna de la dual, obtenemos:

$$\tilde{\varphi}_0^{(3)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{6}(u+3)(u+2)(u+1), & \text{para } -2 \leq u < -1 \\ -\frac{1}{2}(u+2)(u+1)(u-1), & \text{para } -1 \leq u < 0 \\ \frac{1}{2}(u+1)(u-1)(u-2), & \text{para } 0 \leq u < 1 \\ -\frac{1}{6}(u-1)(u-2)(u-3), & \text{para } 1 \leq u < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.27)$$

En general, el polinomio en el c -ésimo intervalo de tiempo de izquierda a derecha del K -ésimo O-spline paso bajo está dado por la siguiente expresión:

$$p_c(u) = \frac{1}{D_c} \prod_{n=1}^{(K+1)} (u+n-c), \quad c = 1, 2, \dots, K+1 \quad (3.28)$$

en la cual la constante D_c garantiza valor unitario con $u = 0$ para cada polinomio. La forma factorizada en (3.28) permite el cálculo de cualquier O-spline, pieza por pieza, evitando el problema de singularidad encontrado en la inversión del operador numérico de Taylor en (3.16) cuando el período T_1 es pequeño [3].

Para los espectros de las O-splines de órdenes desde $K = 1$ hasta $K = 9$, también fueron halladas expresiones en forma cerrada, en el software Wolfram Mathematica. Estos resultados se muestran en el Apéndice B.

3.6 O-SPLINES ARMÓNICOS

Los O-splines armónicos son simplemente versiones moduladas de los splines paso bajo a una frecuencia armónica particular.

$$\tilde{\varphi}_h^{(K)}(u) = \tilde{\varphi}_0^{(K)}(u) \cdot e^{j2\pi hu}, \quad h = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.29)$$

Los cruces por cero de la función exponencial compleja coinciden con los de las O-splines, conservando su propiedad cíclica [3].

CAPÍTULO 4

ALGORITMO DE SINTONIZACIÓN DE FRECUENCIA

La estimación de sincrofasores dinámicos a partir de señales de sistemas eléctricos de potencia sigue siendo un problema abierto y un desafío para mejorar el rendimiento de los sistemas eléctricos en general. En [7] fue propuesto el diseño de un filtro FIR y dos diferenciadores FIR, a partir del O-spline de orden 9, los cuales permiten obtener estimaciones fasoriales asintóticamente cercanas a las de un filtro pasa banda ideal, y estimaciones de frecuencia y ROCOF lo suficientemente cercanas a las de los filtros diferenciadores ideales, y que cumplen en gran medida con el estándar de sincrofasores. Sin embargo, cuando la frecuencia nominal se desvía de su valor real, las estimaciones de fasores y frecuencias proporcionadas por la convolución de la señal y la respuesta al impulso de los filtros pasa banda diseñados con O-splines pueden ser erróneas. La precisión de la estimación puede mejorarse recalculando los coeficientes del filtro en cada iteración, lo que aumenta significativamente el costo computacional. En este capítulo proponemos un algoritmo que tiene como objetivo mejorar la precisión de la estimación de fasores y frecuencias fuera de las nominales, sin un aumento significativo en la complejidad computacional.

4.1 OBTENCIÓN DEL SINCRÓFASOR

Los O-splines paso bajo $\tilde{\varphi}_0^{(K)}(u)$ de cualquier orden K pueden obtenerse mediante la ecuación (3.28), a partir de la concatenación de las piezas polinomiales $p_c(u)$ situadas en sus intervalos correspondientes. Como se muestra en la ecuación (3.29) los O-splines armónicos $\tilde{\varphi}_h^{(K)}(u)$ son simplemente versiones moduladas de los splines paso bajo a una frecuencia armónica particular.

El sincrofásor de una señal real se puede extraer con $\tilde{\varphi}_1^{(K)}(u)$ para un orden K suficientemente grande. Este spline se corresponde con la respuesta al impulso del filtro pasa banda DTTFT en la frecuencia fundamental. Mediante la convolución en el dominio del tiempo de la señal y la respuesta al impulso del filtro pasa banda extraemos el sincrofásor.

En la presente tesis usamos dos filtros de órdenes diferentes para extraer el sincrofásor de señales de voltaje y corriente: el filtro diseñado con el O-spline de orden 9 y el diseñado con el de orden 3. Esta decisión se basa en que el spline nónico ofreció casi los mismos resultados que el decimonónico, cuando este último tiene una duración del doble. La interpolación de una función con un polinomio de Taylor de orden 9, ya ofrece una aproximación muy buena. Por otro lado el filtro de orden 3 ofrece una duración mucho menor pues necesita solo 4 ciclos, lo cual disminuye su complejidad, característica muy deseable en aplicaciones en tiempo real, y a la vez ofrece una buena aproximación, especialmente en el centro del intervalo.

El gráfico superior de la figura 4.1 muestra el O-spline de orden 9 $o^9(t)$ con una duración de 10 ciclos, y el gráfico inferior muestra la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda DTTFT de orden 9 $o^9(t)e^{2\pi f_1 t}$.

Este filtro no solo tiene una ganancia plana en la banda de paso, sino que también tiene bandas eliminadas planas con ganancia cero alrededor de las frecuencias armónicas. La banda de paso plana del filtro es de $\pm 15Hz$.

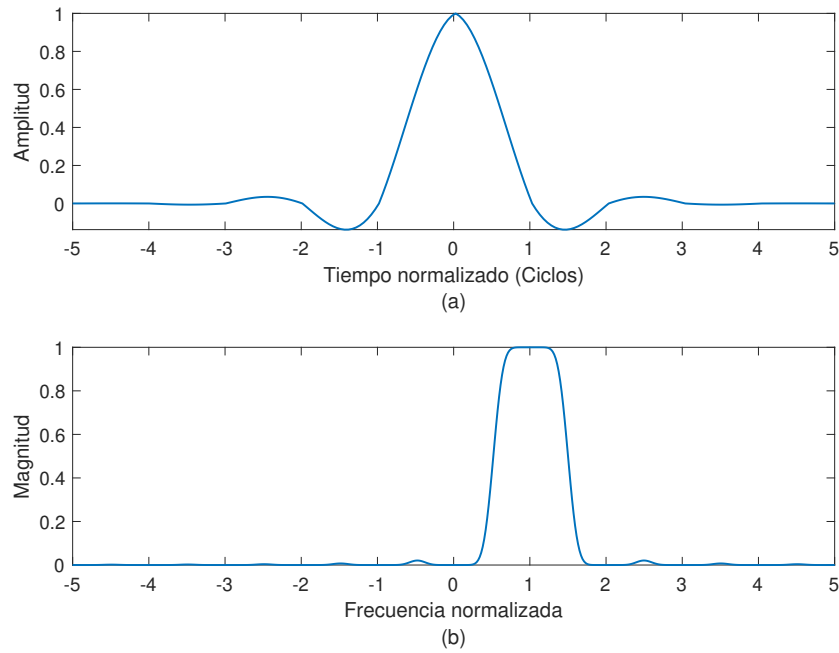


FIGURA 4.1: O-spline paso bajo de orden 9, de 10 ciclos, y respuesta en frecuencia del filtro pasa banda utilizado para extraer el sincrofasor.

La figura 4.2 muestra las dos primeras derivadas del O-spline de orden 9. Modulando estas derivadas a la frecuencia fundamental obtenemos las respuestas al impulso de los filtros que estiman las derivadas fasoriales, a partir de las cuales se obtienen la frecuencia y el ROCOF.

El gráfico superior de la figura 4.3 muestra el O-spline de orden 3 $o^3(t)$ con una duración de 4 ciclos, y el gráfico inferior muestra la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda DTTFT de orden 3 $o^3(t)e^{2\pi f_1 t}$.

Este filtro también tiene una ganancia plana en la banda de paso, y bandas eliminadas planas con ganancia cero alrededor de las frecuencias armónicas, pero tiene lóbulos laterales ligeramente mayores que el de orden 9. La banda de paso plana del filtro es de $\pm 8Hz$.

La figura 4.4 muestra las dos primeras derivadas del O-spline de orden 3.

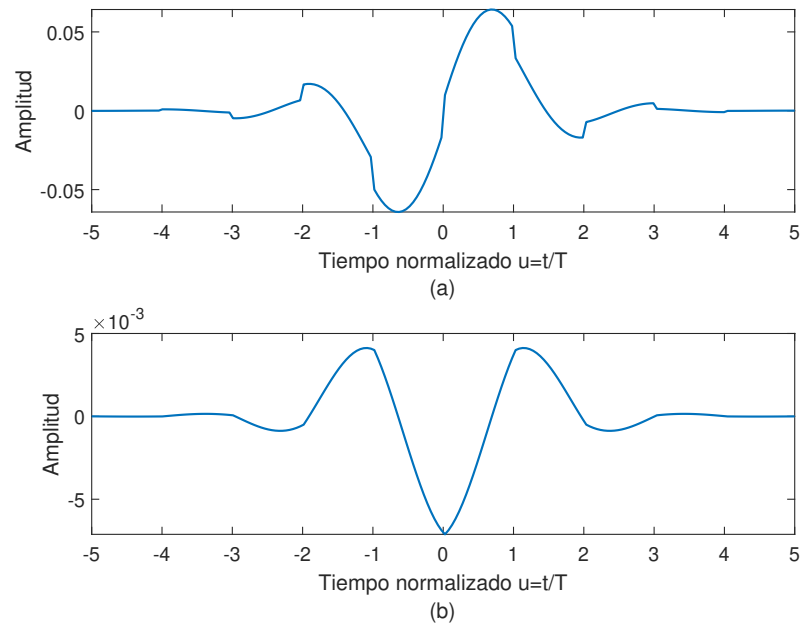


FIGURA 4.2: Respuesta al impulso de la primera y la segunda derivada del filtro paso bajo de Taylor-Fourier de orden 9.

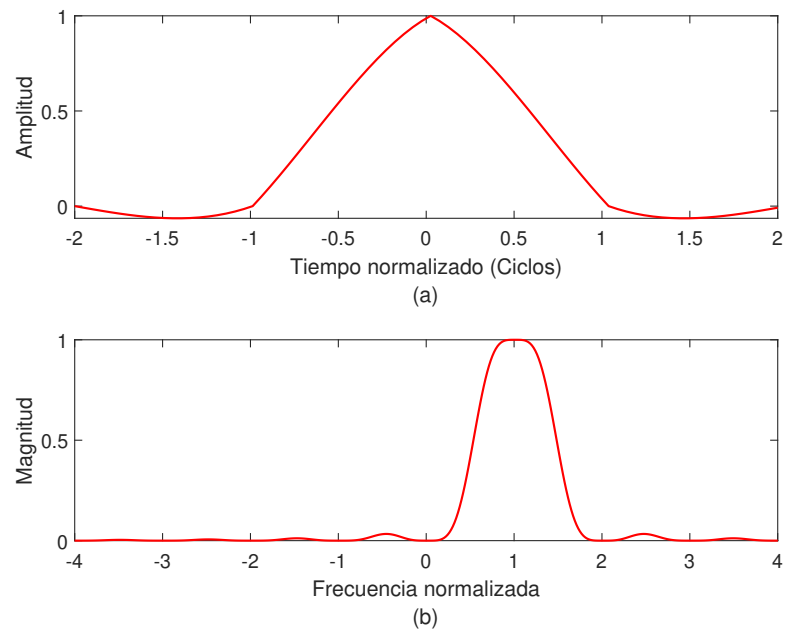


FIGURA 4.3: O-spline paso bajo de orden 3, de 4 ciclos, y respuesta en frecuencia del filtro pasa banda utilizado para extraer el sincrofasor.

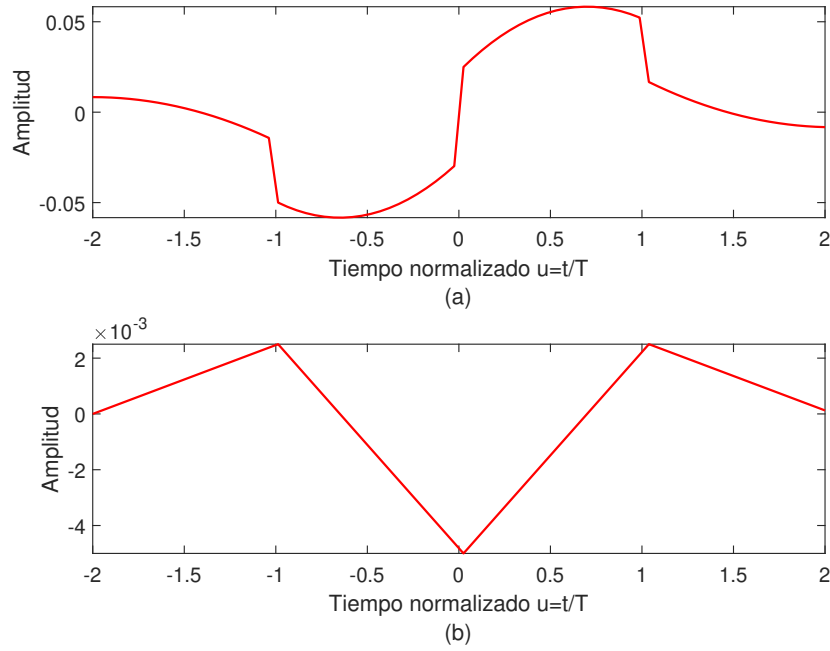


FIGURA 4.4: Respuesta al impulso de la primera y la segunda derivada del filtro paso bajo de Taylor-Fourier de orden 3.

Las derivadas de amplitud y fase pueden obtenerse del fasor y sus primeras derivadas mediante las siguientes expresiones [22]:

$$\hat{a}_l = 2|\hat{\xi}_l| \quad \hat{\varphi}_l = \angle \hat{\xi}_l \quad (4.1)$$

$$\hat{a}_l = 2\text{Re} \left\{ \hat{\xi}_l e^{-j\hat{\varphi}_l} \right\} \quad \hat{\varphi}_l = \frac{2}{\hat{a}_l} \text{Im} \left\{ \hat{\xi}_l e^{-j\hat{\varphi}_l} \right\} \quad (4.2)$$

$$\hat{\dot{a}}_l = 2\text{Re} \left\{ \hat{\dot{\xi}}_l e^{-j\hat{\varphi}_l} \right\} + \hat{a}_l \hat{\varphi}_l^2 \quad \hat{\dot{\varphi}}_l = \frac{2}{\hat{a}_l} \text{Im} \left\{ \hat{\dot{\xi}}_l e^{-j\hat{\varphi}_l} \right\} - \hat{\dot{a}}_l \hat{\varphi}_l \quad (4.3)$$

donde \hat{a}_l y $\hat{\varphi}_l$ son la amplitud y la fase estimadas, respectivamente, y $\hat{\xi}_l$ es el sincrofasor dinámico, las derivadas se indican con el número correspondiente de puntos.

La desviación de frecuencia en *hertz* se calcula mediante:

$$\hat{\Delta f} = \frac{\hat{\dot{\varphi}}_l}{2\pi} \quad (4.4)$$

El ROCOF en *hertz/segundo* lo podemos estimar a partir de:

$$RO\hat{C}OF = \frac{\hat{\dot{\varphi}}_l}{2\pi} \quad (4.5)$$

4.2 ALGORITMO PROPUESTO

Una gran desviación de frecuencia conducirá a grandes errores en la aproximación de Taylor. Las técnicas de sincronización de frecuencia se emplean en la estimación de fasores dinámicos con un fuerte aumento de la carga computacional, lo cual constituye un gran desafío para las aplicaciones en tiempo real. En esta sección presentamos un algoritmo que sintoniza la frecuencia central del filtro de O-splines con la frecuencia real. El rendimiento del algoritmo propuesto se prueba en condiciones dinámicas y estáticas, arrojando buenos resultados.

4.2.1 FORMULACIÓN DEL ALGORITMO

El algoritmo fue diseñado completamente en MATLAB®, su código integro, así como las funciones que utiliza se muestran en el Apéndice C.

El sincrofasor dinámico $\hat{\xi}_l$ se estima a partir de la convolución en el dominio del tiempo de la respuesta al impulso del filtro pasa banda (la cual denotaremos como h_i por concordancia con la notación usada en el código) y la señal real $x(t)$, y sus respectivas derivadas se estiman a partir de la convolución de la respuesta al impulso de los diferenciadores (las cuales denotaremos como h_{ip} y h_{ipp} para el primer y segundo diferenciador respectivamente, por la razones antes expuestas) y la señal en cuestión:

$$\hat{\xi}_l(t) = \{x * h_i\}(t) \quad (4.6)$$

$$\hat{\xi}_l(t) = \{x * h_{ip}\}(t) \quad (4.7)$$

$$\hat{\xi}_l(t) = \{x * h_{ipp}\}(t) \quad (4.8)$$

A partir de $\hat{\xi}_l(t)$, $\hat{\xi}_l(t)$ y $\hat{\xi}_l(t)$ podemos estimar la amplitud, la fase, la desviación de frecuencia y el ROCOF, mediante las ecuaciones de la (4.1) a la (4.5).

Entonces a partir de la desviación de frecuencia estimada $\hat{\Delta}f$ actualizamos los filtros estimadores centrándolos en la frecuencia real.

$$h_{i-centrado}(t) = h_i(t) \cdot e^{j2\pi\hat{\Delta}ft} \quad (4.9)$$

$$h_{ip-centrado}(t) = h_{ip}(t) \cdot e^{j2\pi\hat{\Delta}ft} \quad (4.10)$$

$$h_{ipp-centrado}(t) = h_{ipp}(t) \cdot e^{j2\pi\hat{\Delta}ft} \quad (4.11)$$

Por lo tanto, si la frecuencia fundamental es diferente de la nominal, es suficiente con cambiar la respuesta en frecuencia de los filtros y centrarlos en la nueva frecuencia. Esta operación en el dominio de la frecuencia se corresponde con la multiplicación por la función exponencial compleja en el dominio del tiempo, y viene dada por las ecuaciones de la (4.9) a la (4.11).

Para esta actualización de los filtros además de utilizar la desviación de frecuencia estimada en la iteración anterior también es posible emplear un algoritmo

independiente para la estimación de frecuencia, si así se desea, pero en este trabajo de tesis usamos las estimaciones que nos brindan los propios O-splines.

Estos filtros actualizados continuarán con las estimaciones en tiempo real, a la vez que se irán actualizando cada vez que sea necesario.

El pseudocódigo del algoritmo propuesto se muestra en la Tabla 4.1.

TABLA 4.1: Pseudocódigo del algoritmo propuesto

| |
|---|
| Pseudocódigo: |
| 1: Centrar los filtros en f_0 : $\text{Filtros} = \text{Filtros} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$ Cada muestra (for): 2: Estimar el sincrofasor y sus derivadas $\hat{\xi}_l(t)$, $\hat{\xi}_l'(t)$ y $\hat{\xi}_l''(t)$ a partir de (4.6) a (4.8). 3: Calcular \hat{a}_l , $\hat{\phi}_l$, $\hat{\Delta}f$ y $ROCOF$ a partir de (4.1) a (4.5). Cada 100 muestras (for): 4: $\text{Filtros} = \text{Filtros} \cdot e^{j2\pi \hat{\Delta}f t}$ Fin (end) Fin (end) |

4.2.2 INDICADORES DE RENDIMIENTO

El rendimiento del algoritmo estimador con base en los filtros diseñados con O-splines centrados en la frecuencia nominal es comparado con el algoritmo resultante de actualizar dichos filtros utilizando la frecuencia estimada en lugar de la nominal, dando como resultado un algoritmo seguidor de frecuencia de control digital. Ambos métodos fueron implementados en la misma plataforma (MATLAB®, Windows 10, CPU i3-8145U, 16GB RAM).

Las pruebas de desempeño se basan en el estándar 60255-118-1:2018 de sincrofasores [13]. Incluimos en este caso la prueba de estado estable con un offset de frecuencia y una prueba de estado dinámico con una rampa de frecuencia. Las

demás pruebas que incluye el estándar fueron obviadas en esta evaluación pues no contemplan variaciones de frecuencias considerables para que sea necesario activar el algoritmo de sincronización de frecuencia que estamos evaluando, de hecho, el algoritmo estimador original, o sea, sin la sincronización de frecuencia, pasa todas estas pruebas con buenos resultados.

La señal de prueba se muestrea con una frecuencia de $1200Hz$, formando así 20 muestras dentro de una ventana de $16.66ms$ de ancho, que es el período de la señal con una frecuencia fundamental de $60Hz$.

Los filtros que tienen una respuesta al escalón de menos de 2 ciclos se consideran clase P, y los que tienen una mayor a 7 ciclos clase M. Por lo tanto el filtro DTTFT nónico es de Clase M y el de orden 3 es clase P [13],[7].

Como indicador de rendimiento utilizamos el Error Vectorial Total (TVE), definido en el estándar [13].

El TVE entre el fasor instantáneo estimado $\hat{p}(n)$ y el fasor verdadero $p(n)$ definido en el estándar, mide el módulo instantáneo del error fasorial normalizado en el plano fundamental de Fourier. Es equivalente a la distancia Euclidiana normalizada entre esos parámetros, y según el teorema de Parseval, es solo una medida completa cuando la señal está en ese subespacio. Es una excelente medida cuando se conoce el fasor instantáneo de la señal, como es el caso de las señales de prueba del estándar de sincrofasores. Sin embargo, esta distancia es insuficiente para comparar el rendimiento de diferentes algoritmos cuando se desconoce la secuencia fasorial, como es el caso de la mayoría de las aplicaciones en las que solo está disponible la señal [22].

El TVE considera las diferencias de amplitud y fase en una misma medida. Expresa la magnitud del error entre un valor de referencia y la estimación en el mismo instante de tiempo, como porcentaje de la magnitud del valor de referencia:

$$TVE = \frac{|\hat{p}(n) - p(n)|}{|p(n)|} \quad (4.12)$$

O desglosado en la parte real e imaginaria de los sincrofasores:

$$TVE = \sqrt{\frac{(\hat{X}_r(n) - X_r(n))^2 + (\hat{X}_i(n) - X_i(n))^2}{(X_r(n))^2 + (X_i(n))^2}} \quad (4.13)$$

donde $\hat{X}_r(n)$ y $\hat{X}_i(n)$ son la parte real e imaginaria del sincrofasor estimado $\hat{p}(n)$, y $X_r(n)$ y $X_i(n)$ son la parte real e imaginaria del sincrofasor de referencia $p(n)$ [13]. Su interpretación geométrica se muestra en la figura 4.5.

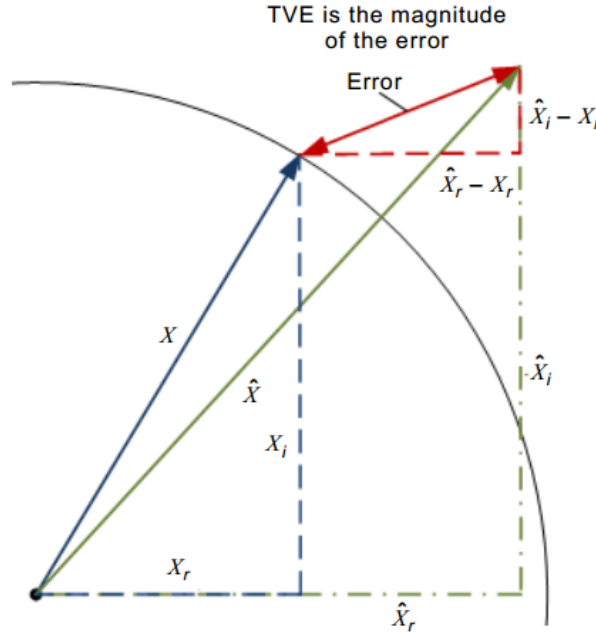


FIGURA 4.5: Error Vectorial Total (TVE).

4.2.3 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

En la primera prueba de rendimiento se considera un offset de frecuencia. La señal se modela utilizando la siguiente forma de onda:

$$x(t) = a_0 \cdot \cos(2\pi f_1 t) \quad (4.14)$$

donde a_0 es la amplitud máxima de la señal sinusoidal y f_1 es la frecuencia fundamental, la cual difiere de la nominal denotada por f_0 en la cantidad de $\Delta f = f_1 - f_0$.

Los sincrofasores de referencia en los tiempos de reporte $t = nT$ están dados por:

$$X(nT) = a_0 \angle (2\pi \Delta f nT) \quad (4.15)$$

donde n es un entero, que se corresponde con el número de muestra y T es el intervalo de reporte del sincrofasor que se corresponde en este caso con el período de muestreo.

Para el filtro de orden $K = 3$ se considera un offset de frecuencia de hasta $\pm 10\text{Hz}$, para el de orden $K = 9$ se considera hasta $\pm 16\text{Hz}$. Las figuras de la 4.6 a 4.9 muestran las gráficas obtenidas en escala lineal y en escala semilogarítmica.

Los resultados numéricos para ambos filtros se informan en las Tablas 4.2 ($K = 3$) y 4.3 ($K = 9$), para un mejor análisis. Solo se muestran los resultados con el offset de frecuencia positivo pues los resultados con el negativo son casi simétricos a estos.

TABLA 4.2: TVE en %, $K = 3$, para diferentes offsets de frecuencia.

| Algoritmo | 1Hz | 2Hz | 3Hz | 4Hz | 5Hz |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $1.9 \cdot 10^{-4}$ | $3.1 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-2}$ | $4.9 \cdot 10^{-2}$ | $1.1 \cdot 10^{-1}$ |
| Con ajuste de frecuencia | $2 \cdot 10^{-4}$ | $3.1 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-2}$ | $4.3 \cdot 10^{-2}$ | $9.4 \cdot 10^{-2}$ |
| Algoritmo | 6Hz | 7Hz | 8Hz | 9Hz | 10Hz |
| Sin ajuste de frecuencia | $2.4 \cdot 10^{-1}$ | $4.4 \cdot 10^{-1}$ | $7.4 \cdot 10^{-1}$ | 1.16 | 1.74 |
| Con ajuste de frecuencia | $2.2 \cdot 10^{-1}$ | $3 \cdot 10^{-1}$ | $4.2 \cdot 10^{-1}$ | $6.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.6 \cdot 10^{-1}$ |

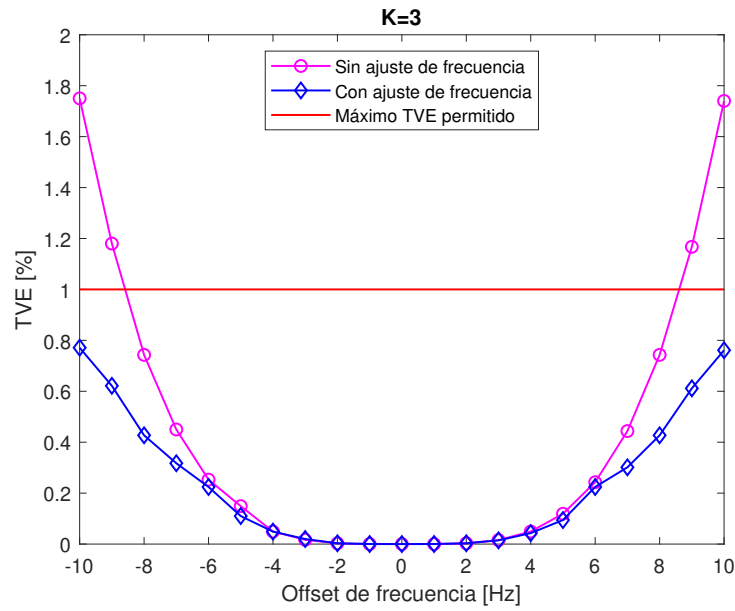


FIGURA 4.6: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$.

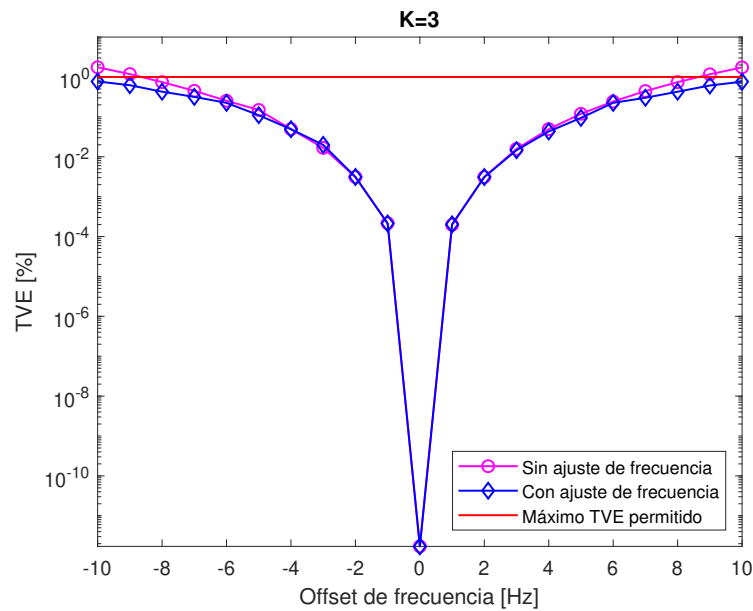


FIGURA 4.7: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$.

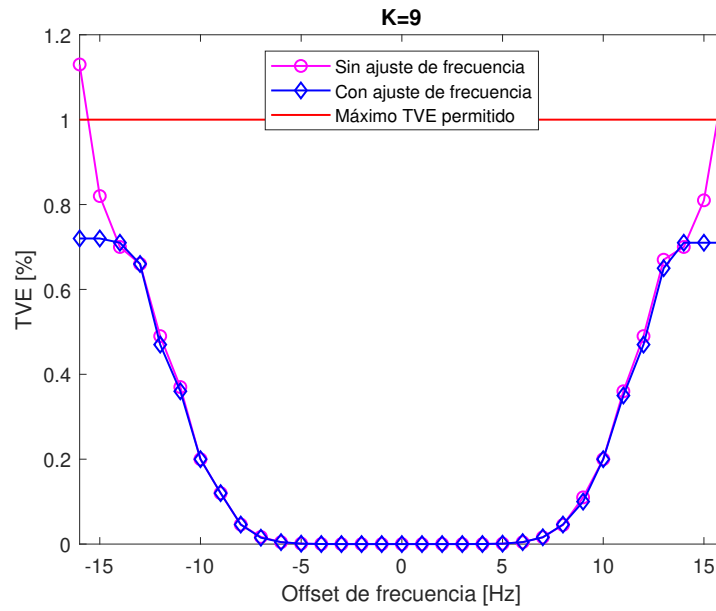


FIGURA 4.8: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$.

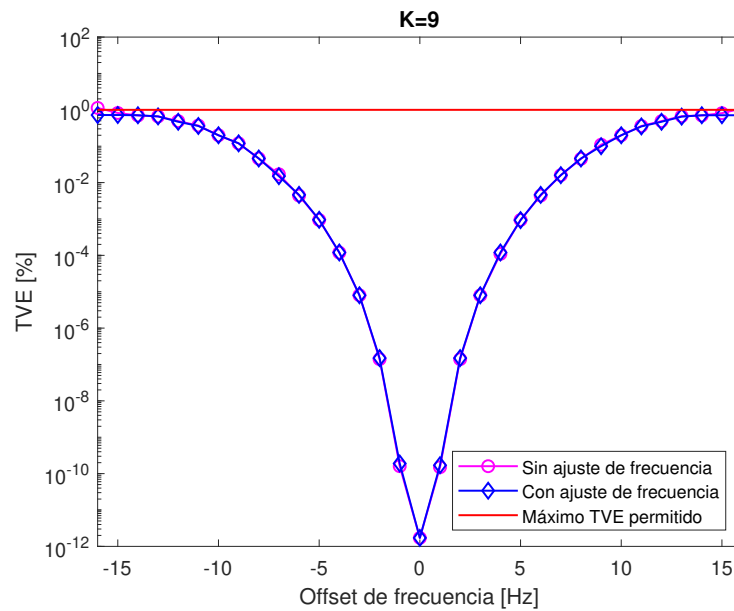


FIGURA 4.9: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$.

TABLA 4.3: TVE en %, $K = 9$, para diferentes offsets de frecuencia.

| Algoritmo | 1Hz | 2Hz | 3Hz | 4Hz | 5Hz | 6Hz | 7Hz | 8Hz |
|--------------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $1.5 \cdot 10^{-10}$ | $1.4 \cdot 10^{-7}$ | $7.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-4}$ | $9.4 \cdot 10^{-4}$ | $4.4 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-2}$ | $4.5 \cdot 10^{-2}$ |
| Con ajuste de frecuencia | $1.7 \cdot 10^{-10}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | $9.3 \cdot 10^{-4}$ | $4.6 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-2}$ | $4.6 \cdot 10^{-2}$ |
| Algoritmo | 9Hz | 10Hz | 11Hz | 12Hz | 13Hz | 14Hz | 15Hz | 16Hz |
| Sin ajuste de frecuencia | $1.1 \cdot 10^{-1}$ | $2 \cdot 10^{-1}$ | $3.6 \cdot 10^{-1}$ | $4.9 \cdot 10^{-1}$ | $6.7 \cdot 10^{-1}$ | $7 \cdot 10^{-1}$ | $7.2 \cdot 10^{-1}$ | 1.09 |
| Con ajuste de frecuencia | $1 \cdot 10^{-1}$ | $2 \cdot 10^{-1}$ | $3.5 \cdot 10^{-1}$ | $4.7 \cdot 10^{-1}$ | $6.5 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ |

Como se puede observar en las figuras y en las tablas, la mejora en el rendimiento comienza a hacerse notoria cuando la señal comienza a salirse de la banda plana del filtro. Mientras que la señal se mantiene dentro de la banda plana no hay mejora alguna, pero en este punto hay que señalar que el rendimiento del filtro ya es excelente siempre que la señal no se vaya de banda, ofreciendo errores del orden de 10^{-12} en el centro del intervalo, sin embargo, cuando las variaciones de frecuencia se acentúan y la señal se aleja lo suficiente, y comienza a salirse de la banda plana, el deterioro es inmediato. En estas circunstancias, se puede apreciar en las figuras, como el algoritmo de sintonización de frecuencia logra que el filtro siga a la señal, mejorando el rendimiento y manteniendo el error por debajo de límite permitido.

Aunque en el estándar no existen directrices acerca del ruido, con el fin de simular condiciones más realistas, además de las pruebas sin ruido, se realizaron pruebas corrompiendo la señal con ruido blanco Gaussiano de media cero y con $SNR = 60dB$, que es un valor típico usado en sistemas de potencia, ya que por lo general no son muy ruidosos [12], [23]. A continuación se muestran los resultados.

TABLA 4.4: TVE en %, $K = 3$, para diferentes offsets de frecuencia, con ruido.

| Algoritmo | 1Hz | 2Hz | 3Hz | 4Hz | 5Hz |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $5.8 \cdot 10^{-2}$ | $5.9 \cdot 10^{-2}$ | $7.3 \cdot 10^{-2}$ | $9.7 \cdot 10^{-2}$ | $1.6 \cdot 10^{-1}$ |
| Con ajuste de frecuencia | $6 \cdot 10^{-2}$ | $6.2 \cdot 10^{-2}$ | $7.1 \cdot 10^{-2}$ | $9.5 \cdot 10^{-2}$ | $1.6 \cdot 10^{-1}$ |
| Algoritmo | 6Hz | 7Hz | 8Hz | 9Hz | 10Hz |
| Sin ajuste de frecuencia | $2.7 \cdot 10^{-1}$ | $4.9 \cdot 10^{-1}$ | $8 \cdot 10^{-1}$ | 1.21 | 1.79 |
| Con ajuste de frecuencia | $2.6 \cdot 10^{-1}$ | $3.2 \cdot 10^{-1}$ | $4.4 \cdot 10^{-1}$ | $6.6 \cdot 10^{-1}$ | $8.2 \cdot 10^{-1}$ |

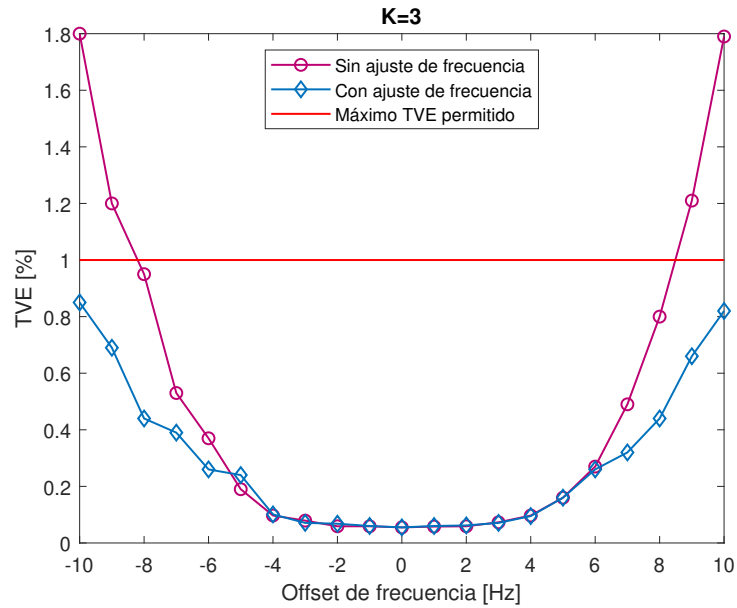


FIGURA 4.10: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

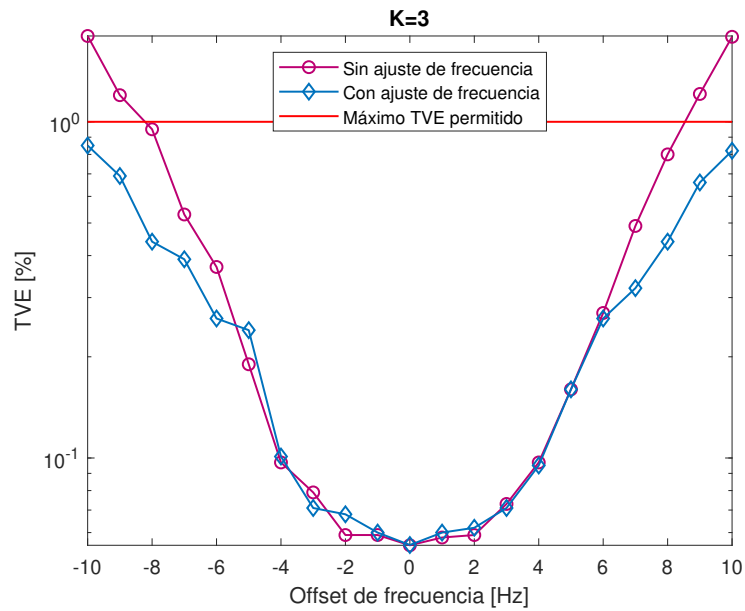


FIGURA 4.11: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

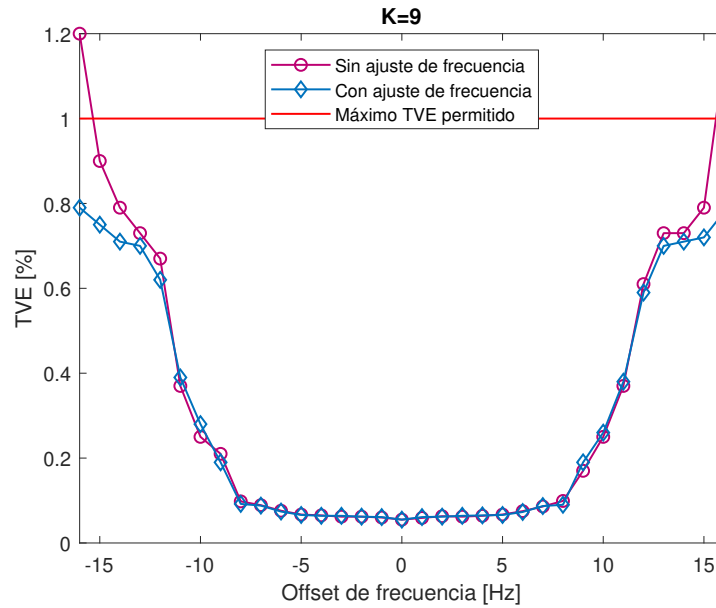


FIGURA 4.12: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

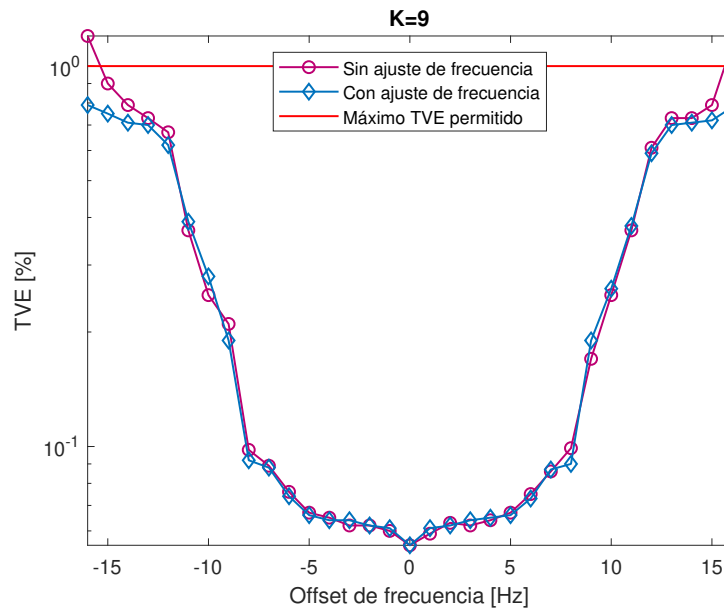


FIGURA 4.13: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

TABLA 4.5: TVE en %, $K = 9$, para diferentes offsets de frecuencia, con ruido.

| Algoritmo | 1Hz | 2Hz | 3Hz | 4Hz | 5Hz | 6Hz | 7Hz | 8Hz |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $5.9 \cdot 10^{-2}$ | $6.3 \cdot 10^{-2}$ | $6.2 \cdot 10^{-2}$ | $6.4 \cdot 10^{-2}$ | $6.7 \cdot 10^{-2}$ | $7.5 \cdot 10^{-2}$ | $8.6 \cdot 10^{-2}$ | $9.9 \cdot 10^{-2}$ |
| Con ajuste de frecuencia | $6.1 \cdot 10^{-2}$ | $6.2 \cdot 10^{-2}$ | $6.4 \cdot 10^{-2}$ | $6.5 \cdot 10^{-2}$ | $6.6 \cdot 10^{-2}$ | $7.3 \cdot 10^{-2}$ | $8.7 \cdot 10^{-2}$ | $9 \cdot 10^{-2}$ |
| Algoritmo | 9Hz | 10Hz | 11Hz | 12Hz | 13Hz | 14Hz | 15Hz | 16Hz |
| Sin ajuste de frecuencia | $1.7 \cdot 10^{-1}$ | $2.5 \cdot 10^{-1}$ | $3.7 \cdot 10^{-1}$ | $6.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.3 \cdot 10^{-1}$ | $7.3 \cdot 10^{-1}$ | $7.9 \cdot 10^{-1}$ | 1.14 |
| Con ajuste de frecuencia | $1.9 \cdot 10^{-1}$ | $2.6 \cdot 10^{-1}$ | $3.8 \cdot 10^{-1}$ | $5.9 \cdot 10^{-1}$ | $7 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.2 \cdot 10^{-1}$ | $7.8 \cdot 10^{-1}$ |

Como se puede apreciar en estos resultados las estimaciones se degradan en presencia de ruido blanco Gaussiano, pero la degradación no es significativa y el TVE se mantiene dentro de los límites permitidos.

En la siguiente prueba de medición dinámica, se considera una señal medida con una frecuencia que cambia linealmente, o sea, una rampa de frecuencia. La señal se modela utilizando la siguiente forma de onda:

$$x(t) = a_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \pi R t^2) \quad (4.16)$$

donde a_0 es la amplitud máxima de la señal sinusoidal, f_0 es la frecuencia nominal y R es la tasa de variación de frecuencia expresada en Hz/s .

Los sincrofasores de referencia en los tiempos de reporte $t = nT$ están dados por:

$$X(nT) = a_0 \angle (\pi R (nT)^2) \quad (4.17)$$

Dado que la desviación de frecuencia de su valor nominal aumenta con el tiempo, se considera un tiempo máximo de 2 segundos para el filtro de orden $K = 3$, con rampas de frecuencias positiva y negativa, siendo $R = \pm 5 Hz/s$, para alcanzar una desviación de frecuencia máxima de $\Delta f = \pm 10 Hz$. Para el filtro de orden $K = 9$ se considera un tiempo máximo de 4 segundos, para alcanzar una desviación de frecuencia máxima de $\Delta f = \pm 20 Hz$. Las figuras de la 4.14 a 4.17 muestran

las gráficas obtenidas en escala lineal y en escala semilogarítmica para diferentes intervalos de tiempo. Solo se muestran los resultados con la rampa de frecuencia positiva pues los resultados con la negativa son prácticamente simétricos a estos.

Los resultados numéricos para ambos filtros se informan en las Tablas 4.6 ($K = 3$) y 4.7 ($K = 9$), para un mejor análisis.

TABLA 4.6: TVE en %, $K = 3$, $R = 5Hz/s$, para diferentes tiempos.

| Algoritmo | 0.5s | 1s | 1.5s | 2s |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $7.3 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-1}$ | $5.5 \cdot 10^{-1}$ | 1.11 |
| Con ajuste de frecuencia | $6.8 \cdot 10^{-3}$ | $7.9 \cdot 10^{-2}$ | $3.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.7 \cdot 10^{-1}$ |

TABLA 4.7: TVE en %, $K = 9$, $R = 5Hz/s$, para diferentes tiempos.

| Algoritmo | 0.5s | 1s | 1.5s | 2s | 2.5s | 3s | 3.5s | 4s |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $7.1 \cdot 10^{-8}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ | $7.3 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $9.9 \cdot 10^{-2}$ | $5 \cdot 10^{-1}$ | 1.82 | 5.12 |
| Con ajuste de frecuencia | $1 \cdot 10^{-7}$ | $1.9 \cdot 10^{-5}$ | $8 \cdot 10^{-4}$ | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $9.7 \cdot 10^{-2}$ | $4.3 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ | $7.1 \cdot 10^{-1}$ |

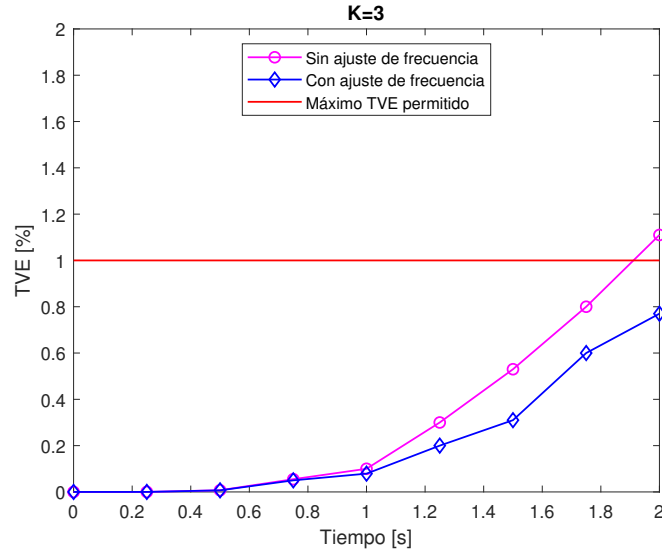


FIGURA 4.14: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$.

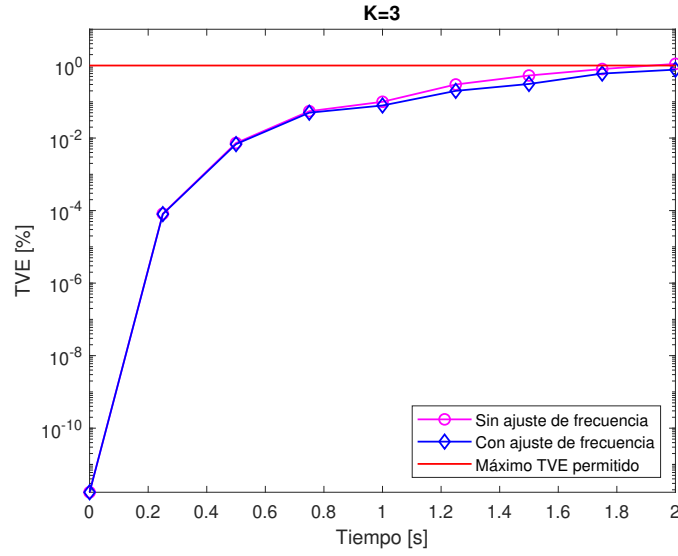


FIGURA 4.15: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$.

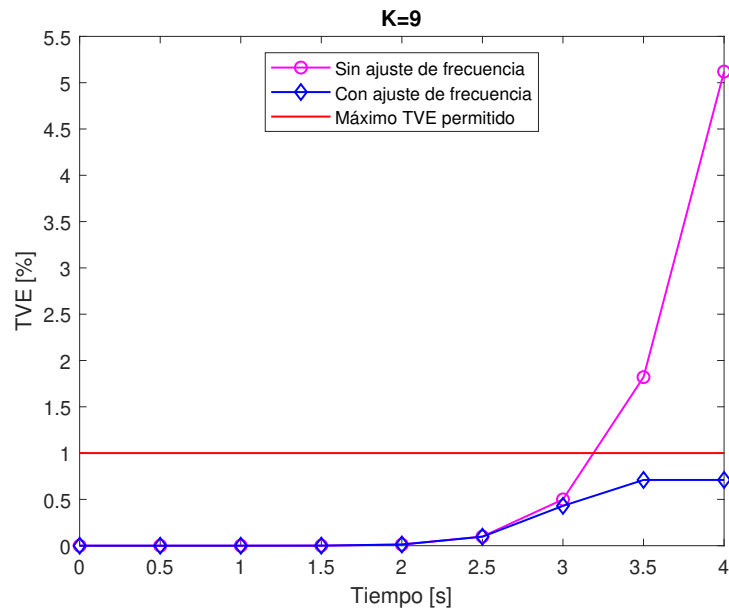


FIGURA 4.16: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$.

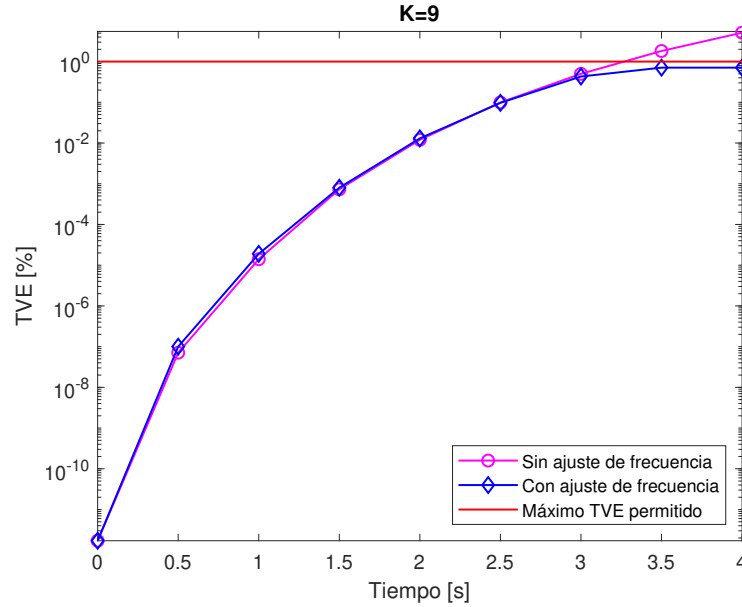


FIGURA 4.17: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$.

Al igual que en la prueba de estado estable, los resultados de esta prueba dinámica demuestran que la mejora en el rendimiento comienza a hacerse notoria cuando la señal comienza a salirse de la banda plana del filtro. Dentro de la banda plana no hay mejora alguna, sin embargo, cuando la rampa de frecuencia se mantiene el tiempo suficiente como para que la señal comience a salirse de la banda plana, el deterioro es inmediato y el error supera el límite permitido, aumentando cada vez más. En estas circunstancias el algoritmo de sintonización de frecuencia logra que la banda plana del filtro siga a la señal como un techo, manteniendo el error dentro de los límites.

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones añadiendo ruido blanco Gaussiano de media cero y con $SNR = 60dB$.

Al igual que en la prueba anterior los resultados revelan que las estimaciones se degradan en presencia de ruido blanco Gaussiano, pero la degradación no es significativa y el TVE se mantiene dentro de los límites permitidos.

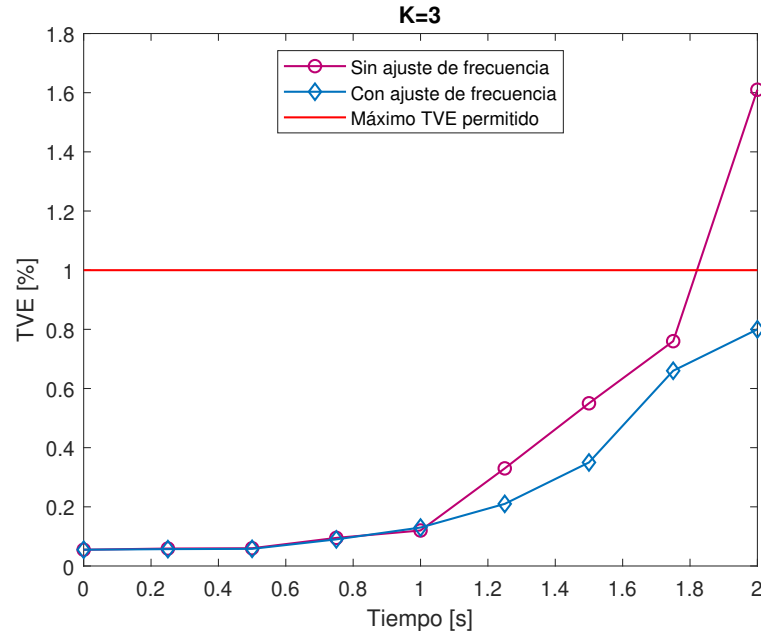


FIGURA 4.18: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

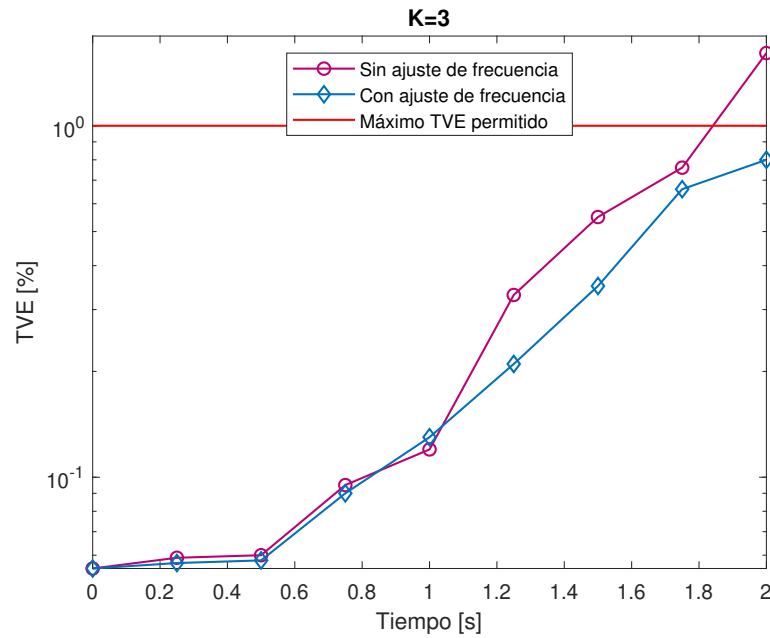


FIGURA 4.19: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 3$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

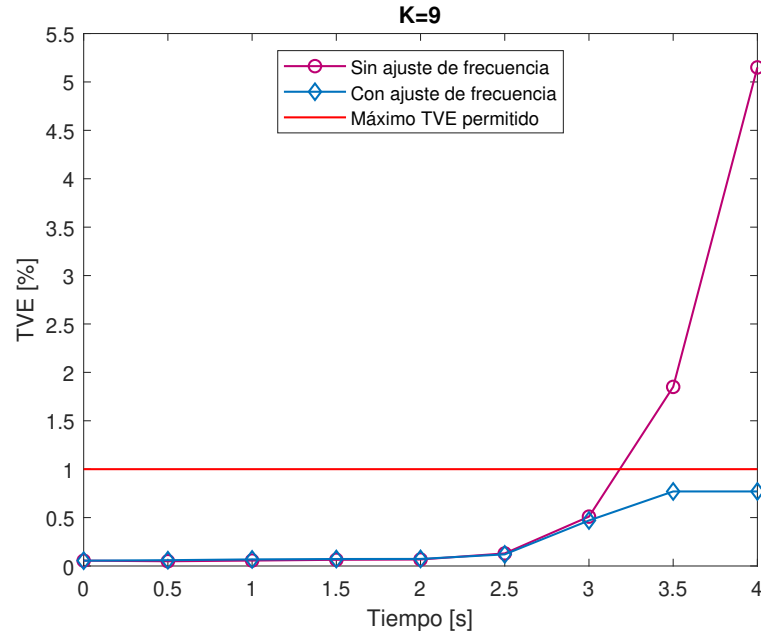


FIGURA 4.20: TVE (escala lineal) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

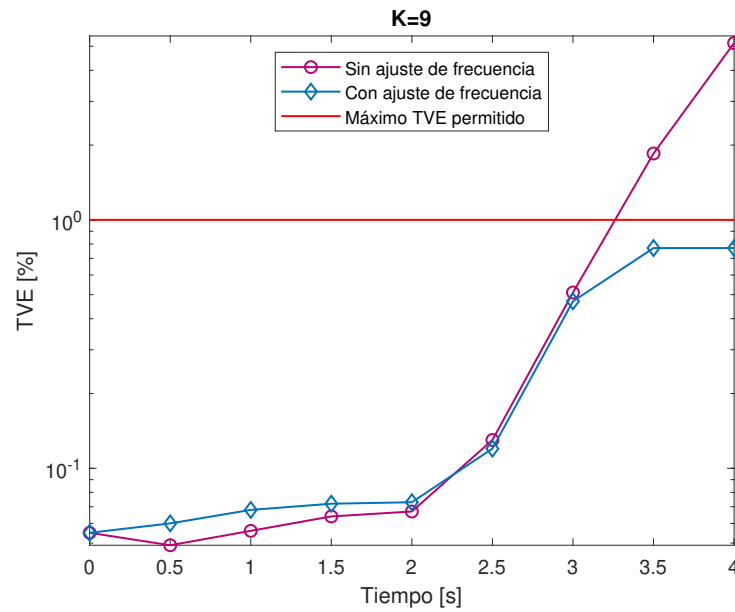


FIGURA 4.21: TVE (escala semilogarítmica) de las estimaciones obtenidas con el filtro DTTFT de orden $K = 9$ en presencia de ruido blanco Gaussiano.

TABLA 4.8: TVE en %, $K = 3$, $R = 5Hz/s$, para diferentes tiempos, con ruido.

| Algoritmo | 0.5s | 1s | 1.5s | 2s |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $6 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-1}$ | $5.5 \cdot 10^{-1}$ | 1.61 |
| Con ajuste de frecuencia | $5.8 \cdot 10^{-2}$ | $1.3 \cdot 10^{-1}$ | $3.5 \cdot 10^{-1}$ | $8 \cdot 10^{-1}$ |

TABLA 4.9: TVE en %, $K = 9$, $R = 5Hz/s$, para diferentes tiempos, con ruido.

| Algoritmo | 0.5s | 1s | 1.5s | 2s | 2.5s | 3s | 3.5s | 4s |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Sin ajuste de frecuencia | $4.9 \cdot 10^{-2}$ | $5.6 \cdot 10^{-2}$ | $6.4 \cdot 10^{-2}$ | $6.7 \cdot 10^{-2}$ | $1.3 \cdot 10^{-1}$ | $5.1 \cdot 10^{-1}$ | 1.85 | 5.15 |
| Con ajuste de frecuencia | $6 \cdot 10^{-2}$ | $6.8 \cdot 10^{-2}$ | $7.2 \cdot 10^{-2}$ | $7.3 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-1}$ | $4.7 \cdot 10^{-1}$ | $7.7 \cdot 10^{-1}$ | $7.7 \cdot 10^{-1}$ |

Los siguientes enlaces nos permiten ver dos simulaciones de los filtros realizando las estimaciones. Ambas simulaciones se realizaron con $K = 9$, con $R = 5Hz/s$, en un tiempo de 4 segundos, en presencia de ruido blanco Gaussiano de media cero y con $SNR = 60dB$.

En el primer video se hacen las estimaciones sin estar activo el algoritmo de sincronización, y se puede ver en el siguiente enlace: <https://bit.ly/3vCeTvI>

En el segundo video entra en acción el algoritmo de sincronización de frecuencia, y se puede ver en el siguiente enlace: <https://bit.ly/3fcbQnx>

En ambos videos se muestran 5 gráficas, las cuales se explican a continuación:

- La primera gráfica simula la convolución entre la señal y la respuesta al impulso del filtro.
- La segunda gráfica muestra las estimaciones de amplitud.
- La tercera gráfica muestra las estimaciones de fase.
- La cuarta gráfica muestra el TVE en %.
- La quinta y última gráfica simula el espectro de la señal y el espectro del filtro.

Como podemos apreciar cuando no se hace ajuste de frecuencia el TVE comienza a aumentar, en señal del deterioro de las estimaciones. Como se puede apreciar en la última gráfica, esto sucede cuando la señal comienza a salirse de la banda plana del filtro. Sin embargo, en la simulación donde está activo el algoritmo de sincronización se puede apreciar como el filtro se va moviendo con la señal, siguiéndola en todo momento, por lo que el TVE se mantiene dentro de los límites.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En el presente documento de tesis, se desarrolló un algoritmo seguidor de frecuencia de control digital, diseñado específicamente para sintonizar la frecuencia de los filtros diseñados con O-splines.

Las pruebas de rendimiento realizadas con los filtros de órdenes $K = 3$ y $K = 9$ revelan que el algoritmo es funcional para casos en los que existen variaciones de frecuencias mayores que las bandas de paso planas de los filtros, sea $\pm 8Hz$ para $K = 3$ y $\pm 15Hz$ para $K = 9$, pues mientras la señal se mantiene dentro de la banda plana o no hay mejora alguna, o es muy pequeña. Sin embargo, cuando las variaciones de frecuencia hacen que la señal comience a salirse de la banda plana, el deterioro es inmediato. En estas circunstancias el algoritmo de sintonización de frecuencia logra que la banda plana del filtro siga a la señal, manteniendo el error dentro de los límites.

Los filtros también demostraron un buen rendimiento ante el ruido blanco Gaussiano, para valores típicos usados en sistemas de potencia, que por lo general no son muy ruidosos. Los errores se mantuvieron controlados ante esta perturbación.

Por lo tanto, el filtro sincronizado de orden $K = 3$ pudiera tener aplicación en la estimación sincrofasorial, donde existan ciertas condiciones hostiles, en las que estén presentes variaciones importantes de frecuencia, superiores a las que abarca

la banda plana del filtro, en estas circunstancias el algoritmo seguidor de frecuencia se hará cargo de seguir esas variaciones y logrará mantener el error de estimación dentro de lo permitido. Este es un filtro clase P, de menor duración y complejidad. Esta clase, según el estándar de sincrofasores [13], está destinada a aplicaciones que requieren una respuesta rápida, como las aplicaciones de protección.

Igualmente el filtro sincronizado de orden $K = 9$ se recomienda para aplicaciones en las que estén presentes variaciones de frecuencia superiores a las que abarca la banda plana de dicho filtro. Este filtro es de clase M, la cual está destinada a aplicaciones que podrían verse afectadas negativamente por señales alias causadas por interferencias, pero que admiten un tiempo de respuesta al escalón un poco más elevado que la clase P [13]. Este filtro pudiera tener importantes aplicaciones en el área de telecomunicaciones, y en investigaciones futuras pretendemos probar su eficacia en sistemas de transmisión digital de diferentes canales adyacentes.

La designación de clases P o M no indica explícitamente que ninguna de las clases sea adecuada o necesaria para una aplicación específica. Se hace necesario el análisis particular y la elección de una clase que coincida con los requisitos de cada aplicación específica. Se debe considerar la compensación inherente entre el rendimiento en el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo.

APÉNDICE A

MATRIZ DE VANDERMONDE

A.1 DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE VANDERMONDE

Dada la matriz de Vandermonde:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{K-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_K & c_K^2 & \cdots & c_K^{K-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Es conocido que:

$$\det(\mathbf{V}_{\mathbf{K}}) = \left[\prod_{k=1}^{(K-1)} (c_K - c_{K-k}) \right] \det(\mathbf{V}_{\mathbf{K}-1}) \quad (\text{A.2})$$

En el caso de $\Phi_0^{(\mathbf{K})}$, $t_K - t_{K-k} = kT$, y

$$\det(\Phi_0^{(\mathbf{K})}) = T^K \cdot \det(\Phi_0^{(\mathbf{K}-1)}) \quad (\text{A.3})$$

los factoriales de los términos de Taylor en las columnas de $\Phi_0^{(\mathbf{K})}$ cancelan los factoriales en el determinante de la matriz de Vandermonde.

Por lo tanto:

$$\det(\Phi_0^{(\mathbf{K})}) = T^K \cdot T^{K-1} \cdot T^{K-2} \dots T^2 \cdot T = T^{\frac{K(K+1)}{2}} \quad (\text{A.4})$$

con $\det(\Phi_0^{(0)}) = 1$ [3].

APÉNDICE B

ESPECTROS DE LAS O-SPLINES

B.1 ESPECTROS DE LAS O-SPLINES EN FORMA CERRADA

A continuación se muestran expresiones en forma cerrada para los espectros de los O-splines, para órdenes desde $K = 1$ hasta $K = 9$. Fueron obtenidos en el software Wolfram Mathematica.

Para $K = 1$:

$$H(w) = \frac{2 - 2\text{Cos}[w]}{\sqrt{2\pi}w^2} \quad (\text{B.1})$$

Para $K = 2$:

$$H(w) = \frac{ie^{-\frac{3iw}{2}} (-1 + e^{iw})^3 (8 + w^2)}{8\sqrt{2\pi}w^3} \quad (\text{B.2})$$

Para $K = 3$:

$$H(w) = \frac{e^{-2iw} (-1 + e^{iw})^4 (6 + w^2)}{6\sqrt{2\pi}w^4} \quad (\text{B.3})$$

Para $K = 4$:

$$H(w) = -\frac{ie^{-\frac{5iw}{2}}(-1 + e^{iw})^5(384 + 80w^2 + 9w^4)}{384\sqrt{2\pi}w^5} \quad (\text{B.4})$$

Para $K = 5$:

$$H(w) = -\frac{e^{-3iw}(-1 + e^{iw})^6(60 + 15w^2 + 2w^4)}{60\sqrt{2\pi}w^6} \quad (\text{B.5})$$

Para $K = 6$:

$$H(w) = \frac{ie^{-\frac{7iw}{2}}(-1 + e^{iw})^7(46080 + 13440w^2 + 2072w^4 + 225w^6)}{46080\sqrt{2\pi}w^7} \quad (\text{B.6})$$

Para $K = 7$:

$$H(w) = \frac{e^{-4iw}(-1 + e^{iw})^8(840 + 280w^2 + 49w^4 + 6w^6)}{840\sqrt{2\pi}w^8} \quad (\text{B.7})$$

Para $K = 8$:

$$H(w) = -\frac{ie^{-\frac{9iw}{2}}(-1 + e^{iw})^9(10321920 + 3870720w^2 + 758016w^4 + 103328w^6 + 11025w^8)}{10321920\sqrt{2\pi}w^9} \quad (\text{B.8})$$

Para $K = 9$:

$$H(w) = -\frac{e^{-5iw}(-1 + e^{iw})^{10}(15120 + 6300w^2 + 1365w^4 + 205w^6 + 24w^8)}{15120\sqrt{2\pi}w^{10}} \quad (\text{B.9})$$

APÉNDICE C

CÓDIGO EN MATLAB®

Se adjunta el código del algoritmo de control digital seguidor de frecuencia programado en C.1, y en C.2 se adjuntan sus dependencias.

C.1 ALGORITMO

```
1 K=9;           % Orden del Spline
2 N=20;          % Muestras por ciclo
3 Nc=6;          % Es la cantidad de bloques de longitud C=K+1, que ...
                 % tomare, en total seran Nc*(K+1) ciclos
4 Autoajuste = 0; % ON = 1 /// OFF = 0
5 [hi,hip,hipp]=0splinepp(K,N);
6
7 n = 0:Nc*(K+1)*N-1;
8 f = 1;  %Frecuencia normalizada
9
10 %Signal
11 phase = 0;
12 s = cos(2*pi*f*n/N + phase)';
```

```
13 phase = phase*ones(1,length(s));
14 p_referencia = 1.*exp(1i.*phase);
15
16 %Ruido blanco gaussiano
17 y = awgn(s,60,'measured');
18 SNR = snr(s,y-s);
19 s = y;
20
21 %Filtros estimadores centrados en f
22 fil = hi'.*exp(1i*2*pi*f*(0:(K+1)*N-1)/N);
23 filp = hip'.*exp(1i*2*pi*f*(0:(K+1)*N-1)/N);
24 filpp = hipp'.*exp(1i*2*pi*f*(0:(K+1)*N-1)/N);
25
26 %Ajustes necesarios
27 Ls = length(s);
28 Lf = length(fil);
29 fre = linspace(-N/2,N/2,Lf);
30
31 %Relleno con ceros
32 sz = [zeros(size(fil)) s' zeros(size(fil))];
33 fz = [zeros(size(fil)) zeros(size(s')) zeros(size(fil))];
34 fzp = [zeros(size(fil)) zeros(size(s')) zeros(size(fil))];
35 fzpp = [zeros(size(fil)) zeros(size(s')) zeros(size(fil))];
36
37 %Creando los vectores necesarios
38 p = zeros(Ls+Lf+1,1); %p es el fasor estimado
39 pp = zeros(Ls+Lf+1,1); %pp es la desviacion de frecuencia estimada
40 ppp = zeros(Ls+Lf+1,1); %ppp es la tasa de cambio de frecuencia ...
    estimada
41 TVE = zeros(size(Lf+1:Ls));
```



```
42
43 Fig = figure(1);
44 subplot(5,1,2);
45 h = animatedline;
46 ylim([0 1.5])
47 title('Estimaci n de amplitud');
48 subplot(5,1,3);
49 g = animatedline;
50 ylim([-pi pi])
51 title('Estimaci n de fase');
52 subplot(5,1,4);
53 hTVE = animatedline;
54 title('TVE');
55 nc = 0;
56 filename = 'testAnimated.gif';
57
58 for k=Lf+1:Ls
59     fz(k:k+Lf-1) = fil;
60     fzp(k:k+Lf-1) = filp;
61     fzpp(k:k+Lf-1) = filpp;
62
63     %Fasor estimado
64     p(k) = sum(conj(fz).*sz);
65
66     ph= angle(p(k)); %angulo del fasor estimado (fase completa)
67     phc=angle(p(k).*exp(-2i*pi*f/N*n(k))); %fase inicial
68     A = 2*abs(p(k))/N; %amplitud
69
70     %Calculo del TVE en %
```

```

71     TVE(k)=abs(A*exp(1i*phc)— ...
        p_referencia(k-Lf/2))./abs(p_referencia(k-Lf/2)).*100;
72
73     %Cálculo de la fx
74     pp(k) = sum(conj(fzp).*sz);
75
76     ppc = pp(k).*exp(-1i*ph);
77     php=imag(ppc)./(abs(p(k)));
78     pp=php/(2*pi);
79
80     %Cálculo del ROCOF
81     ppp(k)=sum(conj(fzpp).*sz);
82
83     pppc=ppp(k).*exp(-1i*ph);
84     ahpp=real(pppc) + abs(p(k)).*php.^2;
85     phpp=( imag(pppc)— 2*real(ppc).*php )./abs(p(k));
86     ppp=phpp/(2*pi);
87
88     addpoints(h,k,A)
89     addpoints(g,k,phc);
90     addpoints(hTVE,k,TVE(k));
91     drawnow
92
93     if mod(k,5)==0
94         subplot(5,1,1);
95         plot(abs(fz));
96         title('Convoluci n');
97         hold on
98         plot(sz)
99         hold off;

```

```

100
101     %Espectros
102     subplot(5,1,5);
103     Ax = fftshift(fft(fil,Lf));
104     Bx = fftshift(fft(sz(k:k+Lf-1),Lf));
105     plot(60*fre,abs(Ax)/N);
106     xlim([0 600])
107     title('Espectros');
108     hold on
109     plot(60*fre,2*abs(Bx)/Lf);
110     hold off;
111
112 end
113
114 %Hacer autoajuste
115 if mod(k,N*(K+1)/2)==0 & Autoajuste
116
117     %Ajuste de los filtros en la nueva f a partir de la ...
118     %desviacion de frecuencia
119     fil = fil.*exp(-1i*php*((0:(K+1)*N-1)-Lf/2)/N);
120     filp = filp.*exp(-1i*php*((0:(K+1)*N-1)-Lf/2)/N);
121     filpp = filpp.*exp(-1i*php*((0:(K+1)*N-1)-Lf/2)/N);
122
123 end
124
125 %Los pongo en cero para volver a ubicar los filtros una ...
126 %muestra mas
127 %hacia delante
128 fz = zeros(size(fz));
129 fzp = zeros(size(fzp));

```

```

128     fzpp = zeros(size(fzp));
129
130 end

```

C.2 FUNCIÓN OSPLINEPP.M

```

1 function [phi, phip, hipp]=Osplinepp(K,N0)
2 %Order K
3 %N0 Number of samples per cycle
4 delt=1/N0;
5 unit=(0:delt:1-delt)';
6
7 %Order K
8 knots=[flip(-[1:K]) [1:K]];
9 P=ones(N0,K+1);
10 Pp=ones(N0,K+1);
11 Ppp=ones(N0,K+1);
12 ir0=0;
13 for nint=1:K+1
14     u=-(K+1)/2-1+nint+unit;
15     coef= [1, -knots(ir0+1)]/(-knots(ir0+1));
16     for k=1:K
17         P(:,nint)=P(:,nint).*(u-knots(ir0+k))/(-knots(ir0+k));
18         if k>1
19             coef = conv(coef, [1, -knots(ir0+k)]/(-knots(ir0+k)));
20         end
21     end
22 %Derivative Polynomial coefficients

```

```
23     C(:,nint)=coef';
24     Cp(:,nint)=polyder(coef)';
25     Cpp(:,nint)=polyder(Cp(:,nint))';
26
27     %First derivative by Horner scheme
28     Pp(:,nint)=Cp(1,nint)*Pp(:,nint);
29     for k=1:K-1
30         Pp(:,nint)=Pp(:,nint).*u + Cp(k+1,nint);
31     end
32
33     %Second derivative by Horner scheme
34     Ppp(:,nint)=Cpp(1,nint)*Ppp(:,nint);
35     for k=1:K-2
36         Ppp(:,nint)=Ppp(:,nint).*u + Cpp(k+1,nint);
37     end
38     ir0=ir0+1;
39 end
40 N=(K+1)*N0;
41 phi=reshape(P,[N,1]);
42 phip=reshape(Pp,[N,1]);
43 phipp=reshape(Ppp,[N,1]);
44 end
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. A. de la O Serna, “Analyzing power oscillating signals with the o-splines of the discrete taylor–fourier transform,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, no. 6, pp. 7087–7095, 2018.
- [2] J. A. de la O Serna, “Dynamic phasor estimates for power system oscillations,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, 2007.
- [3] J. A. de la O Serna, “Dynamic harmonic analysis with fir filters designed with o-splines,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 67, no. 12, pp. 5092–5100, 2020.
- [4] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, “B-spline signal processing. i. theory,” *IEEE transactions on signal processing*, vol. 41, no. 2, pp. 821–833, 1993.
- [5] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, “B-spline signal processing. ii. efficiency design and applications,” *IEEE transactions on signal processing*, vol. 41, no. 2, pp. 834–848, 1993.
- [6] J. A. de la O Serna, M. R. A. Paternina, A. Zamora-Méndez, R. K. Tripathy, and R. B. Pachori, “Eeg-rhythm specific taylor–fourier filter bank implemented with o-splines for the detection of epilepsy using eeg signals,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 20, no. 12, pp. 6542–6551, 2020.
- [7] J. A. de la O Serna, M. R. A. Paternina, and A. Zamora-Mendez, “Assessing

- synchrophasor estimates of an event captured by a phasor measurement unit,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2020.
- [8] D. Belega, D. Fontanelli, and D. Petri, “Dynamic phasor and frequency measurements by an improved taylor weighted least squares algorithm,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 64, no. 8, pp. 2165–2178, 2015.
- [9] R. Mai, Z. He, L. Fu, B. Kirby, and Z. Bo, “A dynamic synchrophasor estimation algorithm for online application,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 25, no. 2, pp. 570–578, 2010.
- [10] D. Belega, D. Fontanelli, and D. Petri, “Low-complexity least-squares dynamic synchrophasor estimation based on the discrete fourier transform,” *IEEE Transactions on instrumentation and Measurement*, vol. 64, no. 12, pp. 3284–3296, 2015.
- [11] L. Fu, J. Zhang, S. Xiong, Z. He, and R. Mai, “A modified dynamic synchrophasor estimation algorithm considering frequency deviation,” *IEEE Transactions on smart grid*, vol. 8, no. 2, pp. 640–650, 2016.
- [12] Ž. Zečević, I. Jokić, T. Popović, and B. Krstajić, “An efficient phasor and frequency estimation algorithm for wide frequency range,” *Electric Power Systems Research*, vol. 180, p. 106124, 2020.
- [13] “IEEE/IEC international standard - measuring relays and protection equipment - part 118-1: Synchrophasor for power systems - measurements,” pp. 1–78. IEC/IEEE 60255-118-1:2018.
- [14] M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, *Foundations of signal processing*. Cambridge University Press, 2014.
- [15] F. Ayres, E. Mendelson, and L. Abellanas, *Cálculo diferencial e integral*. No. 517/A98dE/3a. ed., McGraw-Hill, 1991.
- [16] L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*. Cambridge University Press, 2007.

-
- [17] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, “Tratamiento de señales en tiempo discreto,” 2011.
 - [18] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, “Digital signal processing,” *PHI Publication: New Delhi, India*, 2004.
 - [19] G. Micula and S. Micula, *Handbook of Splines*. Mathematics and Its Applications, Springer Netherlands, 1999.
 - [20] M. A. Platas-Garza, J. Platas-Garza, and J. A. de la O Serna, “Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 7, pp. 1803–1811, 2009.
 - [21] J. A. de la O Serna, “Taylor–fourier analysis of blood pressure oscillometric waveforms,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 62, no. 9, pp. 2511–2518, 2013.
 - [22] J. A. de la O Serna, “Synchrophasor measurement with polynomial phase-locked-loop taylor–fourier filters,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 64, no. 2, pp. 328–337, 2014.
 - [23] K. Duda and T. P. Zielinski, “P class and m class compliant pmu based on discrete-time frequency-gain transducer,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2021.

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

Ing. Eyelin Delgado Ruiz

Candidato para obtener el grado de
Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

SINTONIZACIÓN DE FRECUENCIA DE FILTROS PASA BANDA
DISEÑADOS CON O-SPLINES.

Eyelin Delgado Ruiz, hija de Braulio Delgado García y Amelia Ruiz Pérez, nació en Cuba el 22 de noviembre de 1989, en la provincia Pinar del Río, municipio Candelaria. Estudió en las escuelas Armando de Pedro, E.S.B.U Combate de Soroa e I.P.V.C.E Federico Engels, la educación primaria, secundaria y preuniversitaria respectivamente. Realizó sus estudios universitarios en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, en La Habana, Cuba, graduándose como ingeniera en telecomunicaciones y electrónica en julio de 2012. Comenzó su vida laboral en la Empresa de Radiocomunicación y Difusión de Cuba. Posteriormente pasó a formar parte de la Compañía Eléctrica de la provincia cubana Artemisa. Por último se desempeñó como ingeniera de proyectos en Emprestur S.A Servicios Tecnológicos.